Professor Dr. R. Schrader
M. Hayer, MSc

SS 2000

Algorithmen zu diskreten Strukturen

3. Übungsblatt

1. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem, $lr(X) = \min\{|Y| : Y$ ist Basis von $X\}$ und $q(\mathcal{F}) = \min\{lr(X) : X \subseteq E\}$ der Rangquotient des Unabhängigkeitssystems. Wir betrachten das Problem $\{\max c(X) : X \in \mathcal{F}\}$. Sei $c(F_{opt})$ der Wert einer Optimallösung und $c(F_G)$ der Wert der Greedy-Lösung.

   (a) Zeigen Sie: $q(\mathcal{F}) \leq c(F_G)/c(F_{opt}) \leq 1$.

   (b) Zeigen Sie, daß die Schranke $c(F_G) \geq c(F_{opt})q(\mathcal{F})$ für die Gütegarantie des Greedy-Algorithmus scharf ist.

2. Jedes Unabhängigkeitssystem läßt sich als Schnitt von Matroiden darstellen. Sei dazu $(E, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem und $C_1, \ldots, C_k$ die minimal abhängigen Mengen. Zeigen Sie:

   (a) $\mathcal{M}^i = \{F \subseteq E : C_i \not\subseteq F\}$ ist ein Matroid.

   (b) $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^k \mathcal{M}^i$

3. Zeigen Sie: sind $\mathcal{M}^i, i = 1, \ldots, k$ Matroide und ist $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^k \mathcal{M}^i$, so gilt $q(\mathcal{F}) \geq 1/k$. Betrachten Sie dazu zwei maximal unabhängige Teilmengen F_1, F_2 einer Teilmenge $X \subseteq E$ und die Mengen $F_j^i, i = 1, \ldots, k,\ j = 1, 2$ als maximale $\mathcal{F}^i$-unabhängige Mengen in $F_1 \cup F_2$ mit $F_j \subseteq F_j^i$. Zeigen Sie, daß jedes $e \in F_2 \setminus F_1$ in höchstens $k - 1$ Mengen $F_1^i \setminus F_1$ liegt.