Professor Dr. R. Schrader
M. Hayer, MSc SS 2000

Algorithmen zu diskreten Strukturen

1. Übungsblatt

1. Zeigen Sie: eine Funktion $f : 2^E \to \mathbb{N}$ ist submodular genau dann, wenn für alle $e \in E$ die Funktionen $f_e(X) = f(X \cup e) - f(X) \quad (X \subseteq E \setminus e)$ monoton fallend sind.

2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $X \subseteq E$ sei $c(X)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von (V, X). Zeigen Sie: $|V| - c(X)$ ist submodular.

3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für $X \subseteq V$ sei $f(X) = |\delta(X)|$ die Anzahl der Kanten im Schnitt X. Zeigen Sie: f ist submodular auf den Teilmengen von V.

4. Zeigen Sie: ist $(E, \mathcal{F})$ ein Unabhängigkeitssystem mit der Eigenschaft, daß der Greedy-Algorithmus jede lineare Zielfunktion über $\mathcal{F}$ optimiert, dann ist $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid.

5. Sei $(E, \mathcal{B})$ die Menge der Basen eines Matroids und sei $c_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$ eine Gewichtung der Grundmenge. Formulieren Sie eine Greedy-Algorithmus zur Bestimmung einer minimal-gewichteten Basis und zeigen Sie seine Optimalität.

6. Sei $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid und $\sigma(A) = \{x : r(A) = r(A \cup x\}$. Zeigen Sie
   (a) $A \subseteq \sigma(A)$.
   (b) $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$ für $A \subseteq B$.
   (c) Its X eine Basis von A, so ist $\sigma(X) = \sigma(A)$