TEMPI
Der Kyoto–Prozess und Dynamische Systeme
Arbeitsmappe zu einem interaktiven Entscheidungsunterstützungssystem

Stefan Pickl
Silja Meyer–Nieberg

22. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Klimaänderung, hervorgerufen durch den Anstieg der Treibhausgase in der Atmosphäre, ist eines der brisantesten Themen unsere Zeit. Klimamodelle weisen auf wahrscheinlich desaströse Folgen einer weiteren Erwärmung hin, und schon jetzt häuft sich die Zahl von Umweltkatastrophen und verschiebt sich der Frühlingsbeginn in Nordeuropa nach vorne.
In der internationalen Klimapolitik wird seit Jahren versucht, sich auf Vorgaben zu einigen, um einen weiteren schnellen Anstieg der Konzentration der Treibhausgase zu verhindern. Der erste Schritt auf diesem Weg war der Beschluss der Klimarahmenkonvention auf dem Weltgipfel für Umwelt und Ernährung 1992 in Rio de Janeiro. Auf einer der Folgekonferenzen 1997 wurde das sogenannte Kyoto–Protokoll verabschiedet. Dieses sieht eine Reduktion der Treibhausgase auf 95% der Menge von 1990 vor und vereinbart verschiedene Hilfsmittel zum Erreichen der Ziele. Über die genaue Umsetzung entbrannte allerdings ein heftiger Streit, der die Einführung lange behinderte. Zu Beginn des Jahres 2002 scheinen die Hindernisse, die einer Ratifizierung des Kyoto–Protokolls im Wege standen, beseitigt, und der Weg zu einem Inkraftreten zum Nachhaltigkeitsgipfel in Johannesburg im September 2002 frei zu sein.
Der Simulation und der Modellierung von Klimaschutzaktivitäten mithilfe zeitdiskreter dynamischer Systeme und spieltheoretischen Methoden kommt daher große Bedeutung zu. Bislang gibt es jedoch kaum dynamische Modelle, die den Kyoto-Prozess realistisch beschreiben.
Mit dem Projekt TEMPI (Technologie Emissionen Mittel Prozess-Identifikation) soll eine virtuelle Lernstätte entwickelt werden, die diesen Aspekt aufbauend auf dem zugrundeliegenden TEM-Modell (Technologie Emissionen Mittel Modell) aufgreift. Die Entwicklung des TEM-Modells wurde 2000 mit dem Dissertationspreis der Gesellschaft für Operations Research GOR gefördert.
Das TEM-Modell eignet sich besonders für den Einsatz in der Schule, da es aufgrund seiner transparenten Struktur Einblicke in die zugrundeliegenden Prozesse erlaubt, gleichzeitig aber ein großes Verhaltensspektrum darstellen kann. Weiterhin berücksichtigt es als eines der wenigen Modelle die Wechselwirkungen zwischen getätigten Investitionen und Emissionsreduktionen.
Die Grundlagen des TEM–Modelles und seiner Anwendung bilden spieltheoretische Überlegungen, Wachstumsprozesse und generell nicht lineare Dynamiken; Themen, die allgemein nicht zum Lehrplan der Schulen gehören, aber durchaus in der Oberstufe behandelt werden können.
In der vorliegenden Arbeitsmappe soll in die oben erwähnten Thematik eingeführt

werden. Das Kapitel 1 versucht einen Überblick über die Grunddynamik des TEM–Modells zu geben und führt in die Modellbildung anhand von Wachstumsprozessen ein. Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den Grundlagen des Kyoto–Prozesses und der Klimaänderung. Im Kapitel 3 werden schließlich spieltheoretische Fragestellungen und dynamische Gleichgewichte betrachtet. Dabei wird auch auf weitere Verhaltensmuster mathematischer Gleichungen eingegangen. Das letzte Kapitel befasst sich mit der gesamten Struktur des TEM-Modells und führt in den Bereich der nichtlinearen Dynamik und des Chaos ein. Bei der Arbeit mit der Mappe ist vorgesehen, dass das erste Kapitel vollständig durchgearbeitet werden soll, um einen grundlegenden Überblick über die einzelnen Gleichungen zu erhalten, während je nach Interessenlage Gruppen gebildet und aus den anderen Kapiteln Bereiche herausgegriffen werden können. Diese Modularisierung entspricht auch dem didaktischem Konzept, das der virtuellen Lernstätte TEMPI zugrundeliegt.

Kapitel 1

Simulationen mit einem Akteur: Wirkungsweise der Parameter

Dieses und die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit Fragen der Klimaproblematik, d.h. mit Fragen wie: Welche Auswirkungen kann die Klimaerwärmung haben ? Welche Inhalte hatte das Abkommen von Kyoto ? Wie kann man versuchen, die Wirksamkeit der einzelnen dort vereinbarten Mechanismen und Vorhaben abzuschätzen ? Wir werden uns im Folgenden mit dem TEM-Modell befassen, das einen der zentralen Punkte des Kyoto-Protokolls, den sogenannten Joint Implementation–Prozess, aufgreift. In diesem Kapitel soll das Modell kurz vorgestellt und das Verhalten der Grundgleichungen des TEM–Modells untersucht werden. Hierbei wollen wir die Frage klären, wie sich grundsätzlich die Mittelaufwendungen und Emissionsreduktionen verhalten, wenn nur ein einziger Spieler vorhanden ist. Damit soll der Einfluss der Parameter λ, ϕ und M^* verdeutlicht werden und somit die Effekte, die bei einer Veränderung zu beobachten sind. Es ist nicht das Ziel dieses Abschnittes, umfassend in das TEM–Modell einzuführen, sondern ein Gefühl für die Gleichungen zu vermitteln.

1.1 Ausgangsgleichungen des TEM-Modells

Das TEM–Modell versucht den Joint Implementation–Prozess im Rahmen des Kyoto-Protokolls (siehe 2) zu beschreiben. Im Kyoto-Protokoll von 1997 wurde vereinbart, die Emissionen der Treibhausgase auf 95% des Niveaus von 1990 zu reduzieren. Um die Emissionsreduktionen für die einzelnen Staaten zu erleichtern, wurden sogenannte flexible Mechanismen eingeführt, darunter auch Joint Implementation. Joint Implementation bedeutet, dass Staaten nicht verpflichtet sind, die Reduktionen unbedingt auf eigenem Gebiet zu erreichen. Sie können auch in anderen Ländern Projekte durchführen und sich die dabei erzielten Emissionsreduktionen zum Teil anrechnen lassen. Den restlichen Teil erhält je nach Vereinbarung der Staat, auf dessen Gebiet die Reduktion erreicht wurde. Das führt dazu, dass im Modell die folgende Grundannahme getroffen wird:

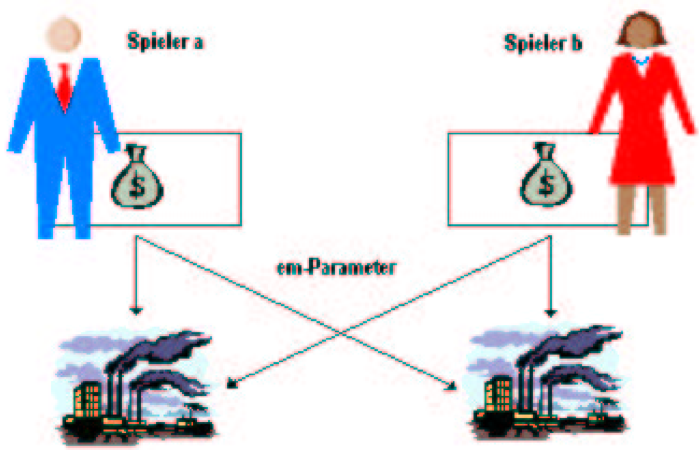
$$\boxed{\textbf{Spieler a kann Emissionsreduktion von Spieler b verändern.}}$$

Das TEM–Modell betrachtet insgesamt drei Spieler (Länder), die versuchen, ihre Kyoto–Vorgaben zu erfüllen, gleichzeitig aber so wenig finanzielle Mittel wie möglich einzusetzen. Für jeden Spieler werden zwei Größen beschrieben: die eingesetzten Mittel (**M**) und die erzielte Emissionsreduktion (**E**) zur Zeit t. Das Modell versucht die Veränderung dieser beiden Werte wiederzugeben, also wie sich sich die Emissionsreduktionen und Mittelaufwendungen von einem Zeitschritt zum nächsten verändern.

$$E_i(t+1) = E_i(t) + f(E_i(t), M_i(t))$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) + g(E_i(t), M_i(t))$$

Jeder dieser Spieler kann –wie bereits erwähnt– seine Mittel im eigenen Land (Auswirkung auf seine eigene Emissionsreduktion) oder in den Ländern der anderen Mitspieler einsetzen. Dies hat entweder eine Verstärkung der Reduktion (positive Kopplung) oder eine Verringerung (negative Kopplung) zur Folge, wenn er z.B. im anderen Land in den Bau von Kohlekraftwerken investiert.



Die Auswirkung von Mittelinvestition auf Emissionsreduktion werden durch die em_{ij}-**Parameter** beschrieben.
Ist z.B. $em_{12} > 0$, so hat die Mittelaufwendung M_2 des zweiten Akteurs einen positiven Einfluss auf die Emissionsreduktion E_1 bei Akteur 1. Ist $em_{12} < 0$, so führen die Mittel, die der Spieler 2 einsetzt, zu einer Verringerung der Reduktionen bei 1. Die mathematische Formulierung hierfür lautet:

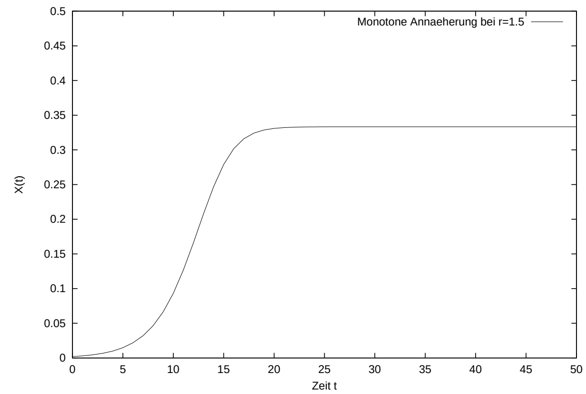
Emissionsreduktion des i-ten Akteurs:

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{3} em_{ij} M_j(t)$$

Damit ist die Entwicklung der Emissionreduktion nur von den jeweils eingesetzten Mitteln abhängig.

Für die Beschreibung der Veränderung der Mittel wird ein anderer Ansatz gewählt. Zunächst muss berücksichtigt werden, dass der Mitteleinsatz nicht unbegrenzt sein wird. Für jeden Spieler wird es eine Obergrenze, im Modell mit M^* bezeichnet, geben, die er nicht überschreiten wird. Um das grundsätzliche Wachstum der Mittel zu beschreiben, wurde die logistische Gleichung gewählt (siehe auch Abschnitt 1.3, Seite 13). Diese hat die folgenden Eigenschaften:

- Berücksichtigung einer Grenze beim Wachstum
- Zu Anfang exponentielles Wachstum
- Je näher man der Kapazitätsgrenze ist, desto langsamer ist das Wachstum
  Allgemeines Aussehen:



Die mathematische Formulierung dafür lautet:

$$M_i(t+1) = M_i(t) + \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))$$

Dabei ist der Ausdruck $\lambda_i M_i(t)$ dem exponentiellen Wachstum vergleichbar. Der Parameter λ_i beschreibt das Ausmaß des Wachstums. Der Ausdruck $M_i^* - M_i(t)$ hingegen gibt an, wie weit man von der Kapazitätsgrenze entfernt ist und korrigiert das Wachstum. Je näher die momentanen Mittel der Kapazitätsgrenze sind, desto kleiner wird der Term und die Zunahme wird immer geringer. Daher flacht die Kurve in der Nähe der Obergrenze immer weiter ab.

Wir müssen noch ein weiteres Verhalten in die Gleichungen integrieren. Es ist nicht anzunehmen, dass die Spieler *blind* investieren werden, also nicht darauf achten, was ihre Investitionen bewirken. Der Mitteleinsatz sollte daher die Emissionsreduktionen berücksichtigen:

- Die Akteure *erinnern* sich an die Wirkung ihrer vorherigen Investition:
  Verläuft die Entwicklung der Emissionsreduktionen in die gewünschte Richtung, so muss kein vermehrter Mitteleinsatz stattfinden.
  Gehen die Emissionsreduktion hingegen zurück, und gerät der Spieler damit in Gefahr, seine Vorgaben nicht erfüllen zu können, muss hingegen ein Einsatz von mehr Mitteln erfolgen.

Die Berücksichtigung dieses Verhaltens erfolgt in den Gleichungen durch die Einführung des Erinnerungsparameters ϕ und Kopplung der logistischen Wachstumsgleichung mit dem Emissionen:

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))(E_i(t) + \phi_i \Delta E_i(t))$$

Dabei ist $\Delta E_i(t) = E_i(t+1) - E_i(t)$. Durch $E_i(t)$ werden die Emissionsreduktionen direkt mit den Mittelaufwendungen gekoppelt. Die Größe $\Delta E_i(t)$ beschreibt hingegen die Änderungen der Emissionsreduktionen. Ist der Wert größer Null, nehmen die Reduktionen zu, sonst ab. Der Erinnerungsparameter ϕ steuert dabei das Ausmaß der Beeinflussung durch die Änderung.
Es fällt auf, dass im Gegensatz zur eigentlichen logistischen Gleichung, statt λ der Wert $-\lambda$ steht. Dies bewirkt folgendes:

Es gilt $-\lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t)) < 0$. Damit liegt nur ein Wachstum der Mittel vor, wenn $E_i(t) + \phi_i(\Delta E_i(t)) < 0$ ist
Somit setzt ein Akteur nur mehr Mittel ein, wenn seine Reduktionen abnehmen.

Zusammenfassung: TEM-Modell

- **Emissionsreduktionen:**

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{3} em_{ij} M_j(t)$$

- **Mittelaufwendungen:**

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))(E_i(t) + \phi_i \Delta E_i(t))$$

- **Prinzipielle Steuerung des Modelles:**
  - Durch Variation der Parameter em_{ij}, ϕ_i, λ_i

  Grundbedeutung der Parameter:

  - em_{ij}: Wie wirkt sich der Mitteleinsatz von Spieler j auf die Emissionsreduktion des Spielers i aus?
  - λ_i: Wie stark wachsen die Mittel von Akteur i?
    Da gilt $-\lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t)) < 0$
    liegt nur ein Wachstum der Mittel vor,
    wenn $E_i(t) + \phi_i(E_i(t+1) - E_i(t)) < 0$
  - ϕ_i: Steuerung des Ausmaßes der Beeinflussung
    durch $E_i(t+1) - E_i(t)$
    Je höher der Wert, desto stärker berücksichtigt der Spieler die Änderung seiner Reduktionen

1.2 Grundgleichungen

Da wir nur einen einzigen Spieler betrachten, fallen alle entsprechenden Koppelungen weg. Die Gleichungen vereinfachen sich somit zu:

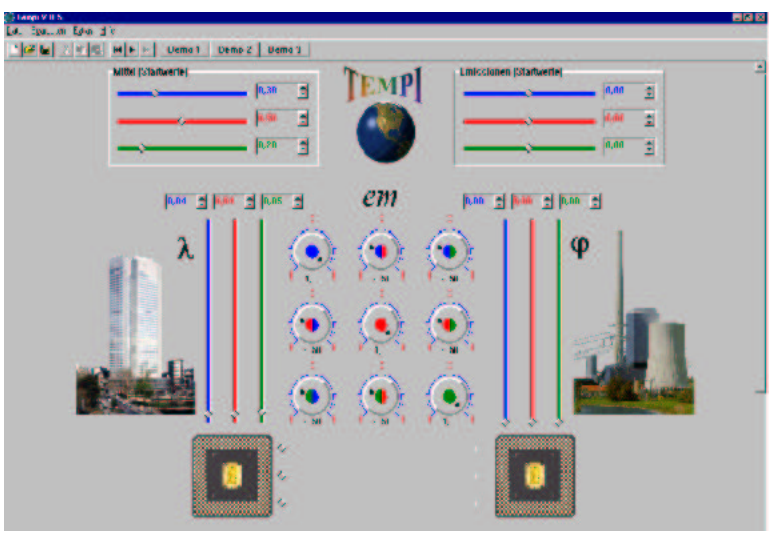
$$
\begin{aligned}
E(t+1) &= E(t) + em\, M(t) \\
M(t+1) &= M(t) - \lambda M(t)(M^* - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))
\end{aligned}
$$

Anmerkung:
Es gilt $em > 0$. Die Wahl von $em \leq 0$ ist bei einem einzigen Spieler prinzipiell widersprüchlich zur Gleichung.
Kleine Übung: Warum ?
Tipp: Setzen Sie $em < 0$, $\phi = 0$, $\lambda > 0$ und betrachten Sie $M(t+1)$. Was fällt dabei auf ? Welche Strategie verfolgt der Spieler anscheinend immer ?
Der Wert em sei also größer Null. Betrachten Sie $E(t+1) = E(t) + emM(t)$.

- Was kann man über das Verhältnis von $E(t+1)$ zu $E(t)$ sagen ?
- Was bedeutet das für $M(t+1)$, wenn die Emissionsreduktionen anfangs größer Null sind ?
- Wann wendet der Akteur mehr Mittel auf ? Was muss für die Anfangswerte gelten ?

Nach diesen eher einfacheren Überlegungen gehen wir nun zum Simulationsprogramm selbst über und untersuchen das generelle Verhalten der Gleichungen. Als Erstes entkoppeln wir die Gleichungen mit Hilfe der Drehknopfregler und stellen alle em–Werte außerhalb der Diagonale auf Null. Damit existieren keine Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Akteuren mehr, und wir können in einem Simulationslauf die Auswirkungen unterschiedlicher Parametereinstellungen untersuchen. Wir werden sehen, dass die Gleichungen je nach Wahl der Parameter ihr Verhalten stark variieren können.

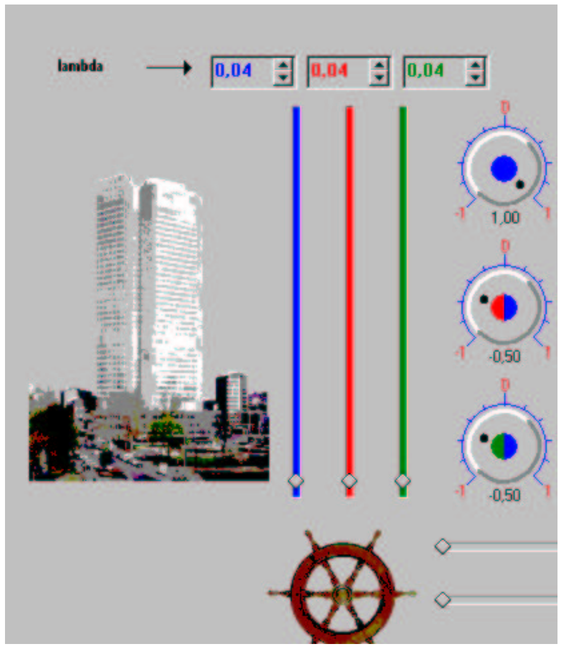
Abbildung 1.1: Simulationsoberfläche



1.2.1 Wachstumsparameter λ

Als Erstes soll der Wachstumsparameter λ betrachtet werden. Wenn die Gleichungen für die einzelnen Spieler entkoppelt sind, wählen Sie die Startwerte für die Mittelaufwendungen im mittleren Bereich (zwischen 0,2 und 0,5) und setzen Sie die Einstellungen für ϕ (Schieberegler rechts) erst einmal auf Null. Als Startwert für die Emissionsreduktionen kann ebenfalls Null eingestellt werden. Der Wachstumsparameter λ kann über die linken Schieberegler reguliert werden.

Abbildung 1.2: Regler für den Wachstumsparameter λ



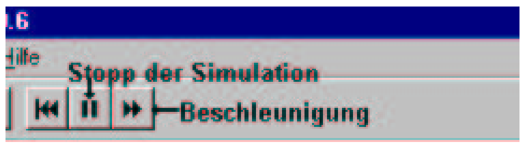
Untersuchen Sie für unterschiedliche Werte von λ das Verhalten der Gleichung (z.B. $\lambda = 0,01;\ 0,1;\ 1$).

- Was fällt dabei auf ? Was bewirkt ein hoher Wert für λ bei den Emissionsreduktionen und warum ?
- Was passiert, wenn die Startwerte für die Emissionen kleiner Null sind, z.B. -1 ?

Eine Simulation selbst kann über einen Klick den Button mit dem nach links zeigenden Dreieck gestartet werden. Daraufhin beginnt das Programm mit der Berechnung und der Anzeige der Werte. Der Button ändert darufhin sein Aussehen und zeigt jetzt das bekannte Pausenzeichen. Ein Klick mit der Maus auf ihn stoppt die Simulation. Läuft sie wieder, so kann man sie mit einem Klick auf den Knopf rechts neben ihn beschleunigen. Mit einem erneuten Drücken wird dann das alte Tempo wieder erreicht. Mit dem Button links neben dem Knopf kann die Simulation gelöscht werden.

Abbildung 1.3: Starten der Simulation

Abbildung 1.4: Anhalten einer Simulation



1.2.2 Erinnerungsparameter ϕ

Neben dem Wachstumsparameter λ weisen die Gleichungen noch den Erinnerungsparameter ϕ auf. Dieser steuert das Ausmaß der Beeinflussung durch die Änderung $E(t+1) - E(t)$.

$$M(t+1) = M(t) - \lambda M(t)(M^* - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))$$

Beschreiben Sie kurz, welche Wirkung ϕ allgemein auf die Gleichung hat:

- Was ist z.B. der Unterschied im Verhalten, wenn man von $\phi = 0$ auf $\phi > 0$ übergeht ?
- Was gilt, wenn $E(t+1) < E(t)$ sein sollte ? (Mit einem Akteur natürlich nicht möglich).
- Welche Wirkung hat ϕ, wenn $E(t)$ wächst ?

Zur genaueren Untersuchung der Auswirkung von ϕ lässt man λ auf einem festen Wert (am besten einem kleinen) stehen und variiert ϕ (z.B. $\phi = 0,01;\ 0,1;\ 1$).

- Was fällt dabei auf ?

Am Deutlichsten wird die Wirkung, wenn die Startwerte für die Emissionsreduktionen negativ sind.
Nachdem wir jetzt die grundsätzlichen Auswirkungen von ϕ und λ kennengelernt

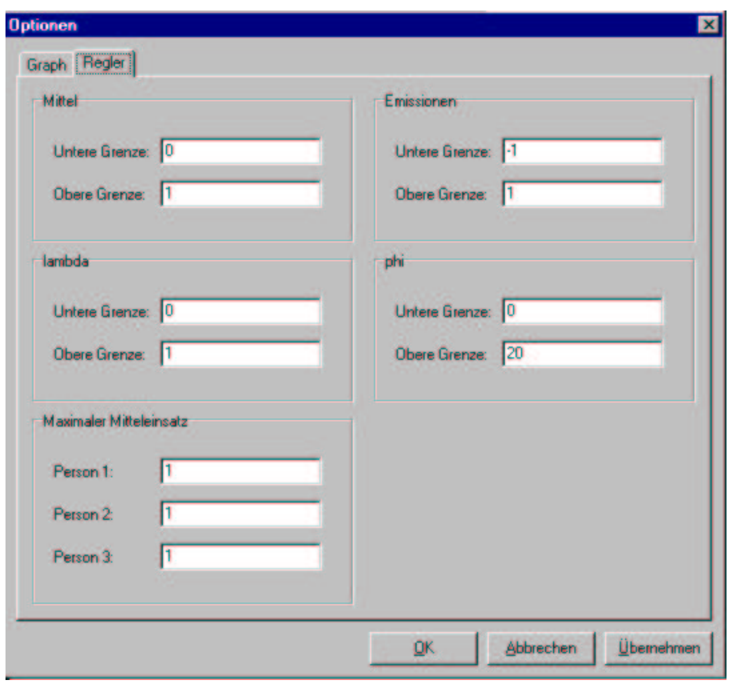
haben, können wir uns mit der Gesamtgleichung auseinandersetzen und Handlungsstrategien für isolierte Akteure entwerfen. Ist es gut schnell zu reagieren, also mit höheren Werten für λ und ϕ zu arbeiten oder ist das gegenteilige Verhalten besser ? Betrachten Sie die drei isolierte Akteure und die folgende Ausgangssituation:
Die drei Spieler wollen das Kyotoprotokoll umsetzen und somit ihre Emissionen auf den Vorgabewert reduzieren. Alle Akteure liegen um 5 Emissionseinheiten unterhalb dieses Kyotozieles, d.h. sie starten mit -5. Beim Versuch ihre Vorgaben zu erfüllen, wollen sie möglichst geringe finanzielle Mittel aufwenden. Das eingesetzte Startkapital sei für alle gleich und liege recht niedrig, z.B. bei $0,1$.

- Welche Strategie scheint am günstigsten zu sein, wenn man die Zeitspanne außer acht lässt?

Anmerkung: Die Unter– und Obergrenzen der Reduktionsstartwerte lassen sich über den Menupunkt: **Extras>Optionen** einstellen.

Abbildung 1.5: Änderungen der Reglereinstellungen und Startwerte

Es erscheint das folgende Fenster:



Warnung: Die Kombination $\phi = 1$, $\lambda = 1$ führt dazu, dass die Mittelaufwendungen sehr schnell ihre Kapazitätsgrenze erreichen, von der sie sich nicht mehr entfernen können, und sollte daher nicht gewählt werden. Für höhere Werte von ϕ, d.h. $\phi > 7$ tritt der Effekt nicht mehr auf.

1.2.3 Kapazitätsgrenze M^*

Um die Betrachtung der Einzelgleichung abzuschließen, wenden wir uns dem letzten einstellbaren Parameter, der Kapazitätsgrenze M^*, zu. Dieser Wert stellt das Maximum für die Mittelaufwendungen dar. Bei der Grundgleichung für das logistische Wachstum:

$$M(t+1) = M(t) + \lambda M(t)(M^* - M(t))$$

gibt $M^* - M(t)$ an, wie weit man von der Kapazitätsgrenze entfernt ist. Je näher man dieser ist, desto stärker wird das Wachstum abgebremst, so dass die Kurve immer mehr abflacht. Was aber ist die Wirkung bei der erweiterten Gleichung

$$M(t+1) = M(t) - \lambda M(t)(M^* - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))?$$

Die Kapazitätsgrenze lässt ebenfalls sich über den Menupunkt: **Extras>Optionen** einstellen. Die Ausgangseinstellung für die Kapazitätsgrenze ist immer der Wert eins. Führen Sie mehrere Simulationsläufe mit unterschiedlichen Werten für M^* (zwischen 1 und 2) durch.

- Welche auf den ersten Blick eigentlich widersprüchliche Auswirkung läßt sich feststellen ? Woran liegt das ?
- Was passiert bei höheren Werten für M^*, wenn die Startwerte für die Reduktionen positiv und wenn sie negativ sind ?

Achtung: Alle Simulationsläufe, die mit der Kapazitätsgrenze als Startwert für die Mittelaufwendung beginnen, sind wenig sinnvoll.

1.3 Mathematischer Exkurs: Modellbildung und logistisches Wachstum

1.3.1 Die logistische Wachstumsgleichung

Im TEM-Modell wird eine abgewandelte Form der logistischen Wachstumsgleichung verwendet, um die Änderung der Mittel zu beschreiben. Das führt zu der Frage, warum man ausgerechnet diese Gleichung und nicht eine andere gewählt hat.
Wir wollen uns daher im Folgenden mit den Eigenschaften der logistischen Gleichung und ihrer Herleitung befassen. Wenn man die Literatur betrachtet, so scheint sie eine Art Universalmittel zur Abbildung von Wachstumsvorgängen jedweder Art zu sein. Man beschreibt mit ihr das Wachstum von Kapital allgemein, Populationen, Tumoren und in der Soziologie die Ausbreitung von Gerüchten (vergl. [1], S.172).
Auf die Vielfalt dieser Prozesse wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen und uns im Weiteren auf die ursprüngliche Anwendung der Gleichung – natürliche Wachstumsvorgänge und dort im Wesentlichen auf das Wachstum von Tierpopulationen beschränken, um die Benutzung der Gleichung zu motivieren. Wenn man das Wachstum bzw. Veränderung von Populationen betrachtet, dann interessiert man sich nur für die Vorgänge, die die Zahl der Tiere verändern. Das können u.a. sein:

- Geburten
- Sterbefälle: Natürlich, Unfall, Raubtiere
- Abwanderung, Zuwanderung

Alle andereren Vorgänge werden vernachlässigt. Die logistische Gleichung dient zur Beschreibung einer solchen Änderung, aber wie kommt man eigentlich gerade auf sie? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns mit dem Gebiet der Modellbildung beschäftigen.

1.3.2 Modellbildung

Modellierung und Modellbildung bezeichnen die Abbildung realer Vorgänge auf –letztendlich– mathematische Gleichungen. In unserem Fall meinen wir also die Abbildung des Wachstums auf die logistische Gleichung. Mit einem Modell können die Eigenschaften eines realen Systems untersucht werden, um es besser zu verstehen und kritische Stellen (Tierpopulation: Aussterben bei bestimmten Sterbe– u. Geburtenraten) zu finden. Wie man sehr leicht einsieht, kann man derartige Versuche nicht in der Realität durchführen.
Wir haben oben den Begriff System gebraucht. Hiermit soll im Folgenden die Menge der untersuchten Objekte mitsamt ihren Wechselwirkungen untereinander umschrieben werden. Beispiele für Systeme sind u.a. Ökosysteme oder Räuber–Beute–Systeme, die die Wechselwirkungen zwischen Raubtier– und Beutepopulationen beschreiben.

Beginnt man mit der Modellierung, so wird zuerst der Zweck des Modelles beschrieben, also was man damit erreichen und abbilden möchte. In unserem Fall einer Tierpopulation:
Wir möchten beschreiben, wie sich die Zahl der Tiere mit fortschreitender Zeit ändert.

Dann versucht man die betroffenen Lebewesen oder Gegenstände, wie z.B. Kapital zu identifizieren und die stattfindenden Prozesse zu beschreiben.
Wieder auf die Tierpopulation bezogen heisst das:
Betroffene Lebewesen: Tiere der Population, z.B. Kaninchen im Umkreis von 1 km
Stattfindende Prozesse: Geburten, Sterbefälle, Zu- und Abwanderung

Die Beschreibung findet erst mithilfe eines Wortmodells statt, dann geht man auf Systemdiagramme über, die die Vorgänge grafisch verdeutlichen und endet schließlich bei mathematischen Formeln, mit deren Hilfe die Simulation durchgeführt werden kann (Diese Punkte werden im nächsten Abschnitt genauer erläutert):

Problembeschreibung u. Modellzweck
↓
Identifizierung der beteiligten Größen
↓
Identifizierung der stattfindenden Prozesse
↓
Wortmodell
↓
Systemdiagramm usw.
↓
Modellgleichungen
↓
Quantifizierung der Parameter
↓
Simulation
↓
Untersuchung des Modells
↓
Anwendung

Ein solcher Prozess durchläuft damit vereinfacht ausgedrückt die Punkte:

- **Identifizierung der zu modellierenden Größen** (Zustandsgrößen), also welche Lebewesen spielen eine Rolle ?

- **Identifizierung der stattfindenden Prozesse**, also welche Vorgänge lassen sich finden und wie kann ich sie abbilden ?

- **Korrekte Abbildung der Prozesse im Modell**, soweit das möglich und für den Modellzweck nötig ist. In vielen Modellen wird zum Beispiel die Annahme getroffen, dass die Sterberaten konstant sind, also immer ein gleicher Anteil der Population stirbt. In der Realität ist die Sterberate natürlich keine Konstante, sondern variiert. Die Fehler, die man mit dieser Annahme macht, können aber meistens vernachlässigt werden, weil sie im Endeffekt keine großen Auswirkungen auf das Ergebnis haben. Je genauer ein Modell ist, desto komplizierter und umfangreicher wird es auch, was zu neuen Problemen führt. Zum einem rechnerische – je detaillierter das Modell, desto mehr Gleichungen gibt es, die gelöst werden müssen, was zu einem hohen Aufwand an Rechenzeit führt. Zum anderen werden es immer mehr Gleichungsparameter, die man bestimmen muss. Eine Bestimmung kann ebenfalls schwierig und ungenau sein, und ein Modell ist meist nur so gut wie die Daten, die man benutzt hat. Der Modellzweck bestimmt damit immer das Modell.

- **Aufstellen der mathematischen Gleichungen** bzw. des Simulationsdiagramms, wenn man ein Simulationstool benutzt, welches daraus Differentialgleichungen erstellt.

- Fast immer: Auswahl der numerischen Integrationsart. Viele Gleichungen können nicht geschlossen gelöst, sondern müssen näherungsweise bestimmt werden. Die meisten Simulationsprogramme bieten zwei Möglichkeiten an: Das recht einfache Euler–Cauchy–Verfahren und die kompliziertere Version von Runge–Kutta, die häufig genauere Ergebnisse liefert.

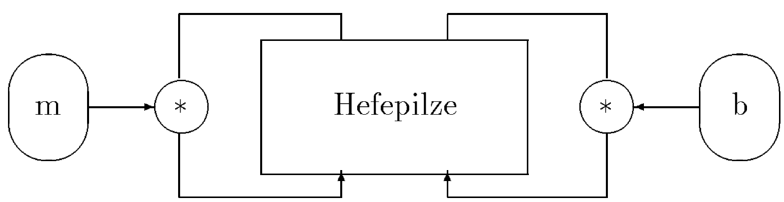
- **Durchführung von Simulationen und Untersuchung des Modells**. Dabei kann das dargestellte System untersucht und das Modell getestet werden. Unter anderen lässt sich durch einen Vergleich von Simulationsrechnung und real vorkommenden Werten die Güte des Modells bestimmen, was eventuell eine Änderung nötig macht. Zudem kann untersucht werden, welcher der Parameter den größten Einfluss auf die simulierte Größe hat, und ob es kritische Werte gibt, die ungünstiges Verhalten auslösen.

1.3.3 Beispiel: Wachstum einer Hefekultur

Wir betrachten als einführendes Beispiel die Entwicklung einer Hefekultur in einer Petrischale. Damit hat man bereits die Zustandsgröße für die Modellierung ermittelt. Weitere existieren in diesem quasi isolierten System nicht. Will man hingegen ein natürlicheres System abbilden, so kann die Identifizierung aller beteiligter Zustandsgrößen ein recht schwieriger Vorgang sein.
Man interessiert sich meist für das Wachstum der Hefekultur, womit als Modellzweck die Beschreibung des Wachstums der Pilzpopulation über die Zeit gewählt werden kann. Die stattfindenden Prozesse stellen bei Hefepilzen in Petrischalen auch keine Schwierigkeiten dar. Hefepilze vermehren sich durch Teilung und sterben offensichtlich ab. Dies führt zu den Veränderungen: Hefepilze sterben und Hefepilze vermehren sich.

Jetzt trifft man die ersten Annahmen, um diese Prozesse abzubilden: Die Vermehrung durch Teilung ist offensichtlich abhängig von der Zahl der Mikroorganismen, die vorhanden sind. Ebenso kann man annehmen, dass die Sterbevorgänge proportional zur Population sind. Weiterhin sollen beide Vorgänge in dem Sinn konstant sein, dass immer ein bestimmter Anteil der vorhandenen Masse stirbt bzw. neu entsteht.

Hefepopulation:
    Mikroorganismen zum Zeitpunkt t: $B(t)$
Vorgänge:
    Sterben zum Zeitpunkt t: $mB(t)$
    Vermehrung zum Zeitpunkt t: $bB(t)$



Veränderung der Zustandgröße beim Übergang von t zu $t + \Delta t$:

$$B(t + \Delta t) - B(t) = mB(t)\Delta t - bB(t)\Delta t$$

Damit haben wir die Gleichungen aufgestellt. Wenn man das Wachstum diskret mithilfe von Differenzengleichungen abbilden möchte, oder ein Simulationstool, wie z.B. Dynasys, benutzt, ist man hiermit fertig. Man muss noch geeignete Werte für den Startwert der Hefepopulation vorgeben und die Parameter m und b setzen.
Wir wollen allerdings zum kontinuierlichen Fall übergehen und uns mit der Differentialgleichung beschäftigen. Dazu formen wir die Gleichung um:

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = mB(t) + bB(t) = (m - b)B(t)$$

Auf der linken Seite steht damit der Differenzenquotient: $\frac{B(t+\Delta t)-B(t)}{\Delta t}$. Wir wollen jetzt –wie gesagt– keine diskreten, sondern kontinuierliche Änderungen betrachten, d.h. solche, bei denen man keine festen Zeitschritte mehr feststellen kann. Daher betrachten wir, was mit der obigen Gleichung geschieht, wenn die Zeitintervalle immer geringer werden. Wenn die Zeitschritte Δt gegen Null gehen, geht der Differenzenquotient gegen die Ableitung von $B(t)$, geschrieben als $\frac{d}{dt}B(t)$. Wir erhalten damit die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}B(t) = (m-b)B(t).$$

Wir kennen damit nur die Funktion für Veränderung der Hefepopulation. Um die Funktion für die Hefekultur selbst zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichung lösen, was durch Integration beider Seiten der Gleichung geschieht. Hierfür muss man die Gleichung zuerst ein wenig umformen. Es ist störend, dass auf beiden Seiten ein Ausdruck mit $B(t)$ vorkommt. Daher bringt man zunächst alle Terme mit $B(t)$ auf eine Seite der Gleichung:

$$\frac{\frac{d}{dt}B(t)}{B(t)} = (m-b)$$

Jetzt müssen zwei Punkte berücksichtigt werden:

- **Kettenregel** $\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$
- **Ableitung des natürlichen Logarithmus** $ln(x)$: $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Damit ist $\frac{\frac{d}{dt}B(t)}{B(t)}$ nichts anderes als: $\frac{d}{dt}ln(B(t))$. (Wer es nicht so glauben möchte, kann $ln(B(t))$ zur Probe nach t ableiten.) Die Gleichung kann damit geschrieben werden als $\frac{d}{dt}ln(B(t)) = (m-b)$ und ausintegriert werden.

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{d}{dt}ln(B(t))dt &= \int_0^s (m-b)dt \\
[ln(B(t))]_0^s &= [(m-b)t]_0^s \\
ln(B(s)) - ln(B(0)) &= ln(\frac{B(s)}{B(0)}) = (m-b)s
\end{aligned}$$

Jetzt wendet man auf beide Seiten die Umkehrfunktion des Logarithmus, die e-Funktion an.

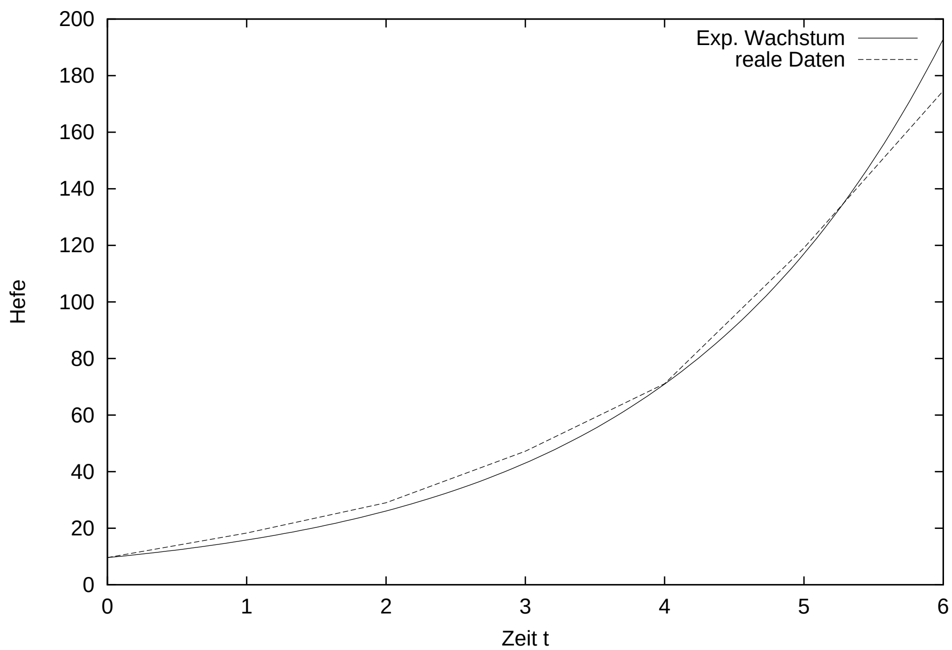
$$\frac{B(s)}{B(0)} = e^{(m-b)s} = e^{rs}$$

Und schließlich: $B(t) = B(0)e^{rs}$. Damit hat man die Gleichung ermittelt. Den freien Parameter bestimmt man durch das Anpassen der Gleichung an die gemessenen Werte (siehe die folgende Tabelle). Mit Anpassen ist nichts anderes gemeint, als dass man versucht r so zu wählen, dass die vorgegebenen Datenpunkte möglichst gut getroffen werden.

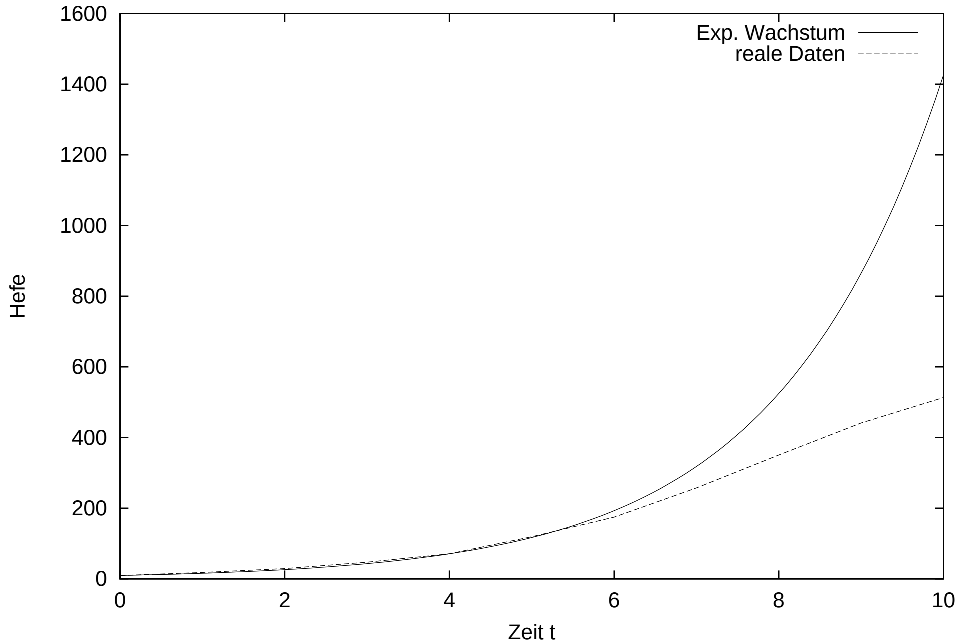
Wachstum einer Hefekultur(Carlson 1913)

Zeit t (in Std.)	*Hefemenge N(t) (in mg)*
0	9,6
1	18,3
2	29,0
3	47,2
4	71,1
5	119,1
6	174,6
7	257,3
8	350,7
9	441,0
10	513,3
11	559,7
12	594,8
13	629,4
14	640,8
15	651,1
16	655,9
17	659,6
18	661,8

Quelle: Krebs 1972, S.218 (bzw. [14])
Wie man sieht, trifft die gewählte Gleichung anfänglich die Werte recht gut.



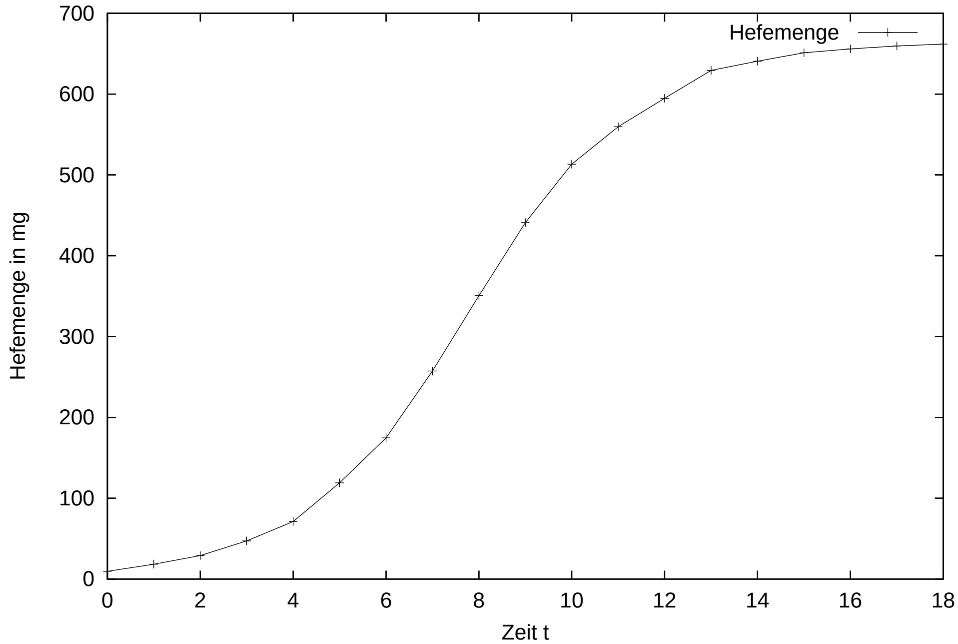
Später allerdings überhaupt nicht mehr, was daran liegt, dass ein exponentielles Wachstum immer stärker ansteigt und schließlich gegen Unendlich geht.



Aufgabe: Tragen Sie die Daten aus der Tabelle auf oder betrachten Sie die folgende Abbildung.

- Wie sieht das gesamte Wachstum hier aus ?
- Welche Gründe können Sie Sich für den Stopp des Wachstums vorstellen ?

Die exponentielle Wachstumsgleichung eignet sich also nicht zur Modellierung dieses Wachstumsvorganges. Wir gehen zur logistischen Beschreibung über. Verhulst stellte bereits 1838 die Grundgleichung auf und formulierte damit eine fundamentale Tatsache. Jedes Wachstum in der Natur ist begrenzt. Zwar kann man mit der exponentiellen Wachstumsgleichung viele Vorgänge in der Natur anfangs ausgezeichnet beschreiben, doch stößt man auf Probleme, wenn die Population sich weiter entwickelt. In der Sprache der Modellierung hat man beim Aufstellen des Modells einen *Abbildungsfehler* gemacht. Anscheinend sind wichtige Vorgänge nicht berücksichtigt worden. Wir sehen, dass das natürliche Wachstum anscheinend irgendwann stoppt, und die Population einen bestimmten Wert nicht überschreitet.



Natürliche Ursachen für ein solches Verhalten können sein:

- Begrenzung der natürlichen Ressourcen: Nahrung etc
- Stressreaktionen bei Zunahme der Bevölkerung
- Konkurrenz innerhalb der Population usw

Eine mathematische Formulierung hierfür stellt die logistische Wachstumsgleichung dar. Sie existiert in mehreren Formen, die allerdings alle ineinander überführbar sind. Sehr häufig wird die folgende Darstellung verwendet:

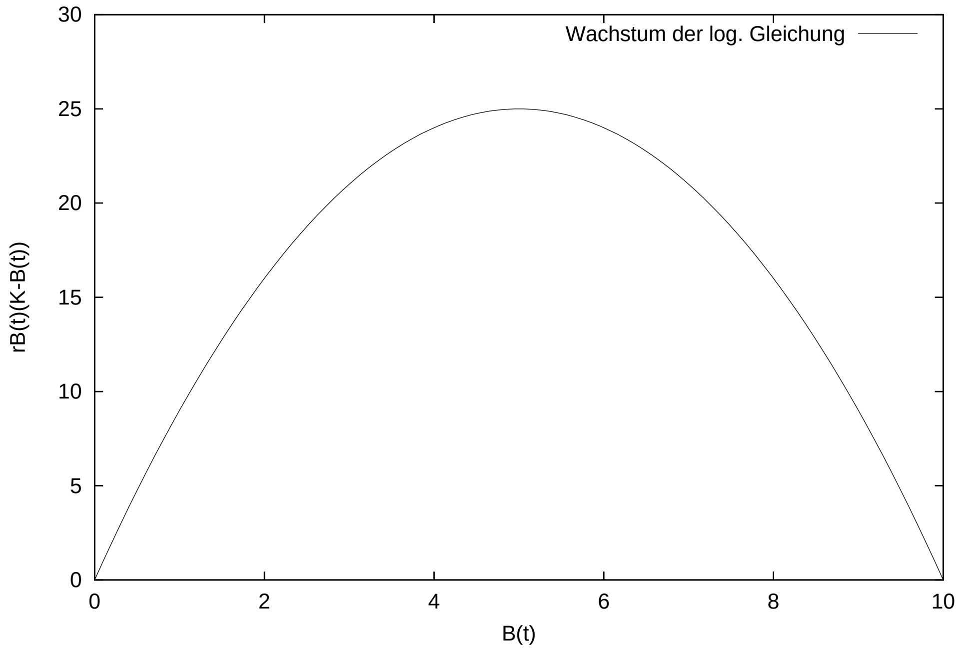
$$\frac{d}{dt}B(t) = rB(t)(K - B(t)),$$

wobei K die Kapazitätsgrenze, also die maximal zu erreichende Population angibt. Der Parameter r ist nachwievor die Wachstumsrate, die allerdings jetzt mit $K - B(t)$ korrigiert wird. Ähnlich häufig findet sich:

$$\frac{d}{dt}B(t) = aB(t) - bB^2(t))$$

was der Ausmultiplikation der ersten entspricht. Der Wert $bB^2(t)$ wird dabei als Korrekturfaktor für das exponentielle Wachstum aufgefasst, der durch die innerartliche Konkurenz entsteht und daher proportional zur Häufigkeit des Aufeinandertreffens zweier Individuen ist.

Aber zurück zur ersten Gleichung. Der Ausdruck $rB(t)(K - B(t))$ wird zunächst immer größer, wenn $B(t)$ ansteigt, das Wachstum somit immer stärker. Dieses Verhalten tritt solange auf, bis $K - B(t)$ deutlicher an Gewicht gewinnt, was –wie man leicht sieht– bei $B(t) = \frac{K}{2}$ der Fall ist. Von da an flacht das Wachstum immer weiter ab, bis schließlich bei $B(t) = K$ die Null erreicht und dann überschritten wird. In der folgenden Grafik wurde $rB(t)(K - B(t))$ gegen $B(t)$ für $r = 1$ und $K = 10$ aufgetragen. Die entstandene Parabel besitzt einen Scheitelpunkt bei $B(t) = 5$.



Mithilfe der logistischen Gleichung konnten die Wachstumsvorgänge bei verschiedenen Populationen erfolgreich beschrieben werden:

Einsatz der logistischen Wachstumsgleichung zur Beschreibung des Wachstums von:

E. coli	McKendrick, Kasava Pai	1911
Hefezellen	Carlson	1913
Bevölkerung der USA	Pearl, Reed, Verhulst	1924
Drosophila Melanogaster (Taufliege)	Pearl	1932
Pantoffeltierchen	Gause	1934
Daphnien (Wasserflöhe)	Slobodkin	1954
Drosophila semata	Ayala	1968

(siehe [1], S. 163)

Der Vorteil der logistischen Wachstumsgleichung ist, dass die Zahl der Parameter (K und r) noch immer gering ist. Damit treten keine größeren Probleme auf. Auch die logistische Gleichung kann nach etwas längerer Rechnung gelöst werden und führt letztendlich auf die Formel:

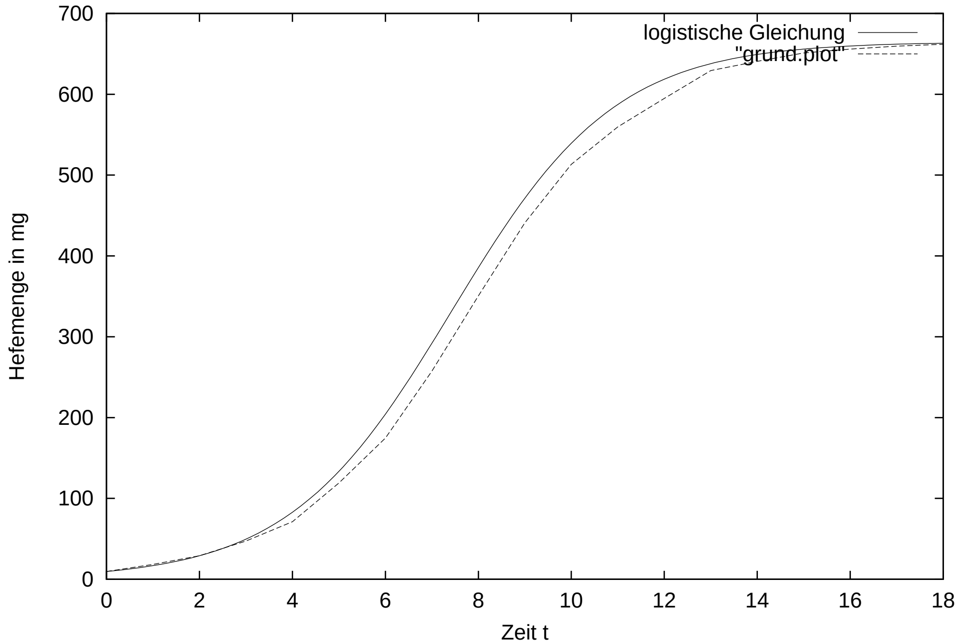
$$B(s) = \frac{K}{(\frac{(K-B(0))}{B(0)})e^{-rKs} + 1}$$

Aufgabe:

- Zeigen Sie durch Ableiten, dass $B(s)$ die Differentialgleichung erfüllt.

(Tipp: An einer Stelle ist eine Ergänzung mit 1, ähnlich wie bei der quadratischen Ergänzung sehr hilfreich.)

Die beiden Parameter r und K werden wieder durch Anpassung der logistischen Gleichung an die realen Daten bestimmt. Nach Kohorst, Portscheller (siehe [14]) ergeben sich hier Werte von 0,00845 für r und 664,858 für K. Die Gleichung sieht im Vergleich zu den gemessenen Daten folgendermaßen aus:



Wir scheinen also eine korrekte Beschreibung benutzt zu haben.

Aufgabe:

Ausbreitung von Infektionskrankheiten (Ohne Geburten)

Wir wollen den Verlauf von Infektionskrankheiten simulieren, die vom Menschen auf den Menschen übertragen werden und keine anderen Wirte besitzen. Zu Anfang betrachten wir die Ausbreitung, wenn weder Geburten– noch Sterbefälle vorliegen. Damit kann man grob und kurzfristig den Verlauf von gutartigen Krankheiten simulieren. Ein gesunder Mensch erkrankt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, wenn er auf einen bereits erkrankten trifft. Erkrankt ein Mensch, so wird er nach kurzer Zeit ebenfalls infektiös. Hier im Modell soll die Annahme getroffen werden, dass dies sofort nach der Ansteckung geschieht. Nach einiger Zeit wird der Mensch wieder gesund und ist im folgendem immun gegen die Krankheit. Die Gruppe der Immunen kann –je nach Modellinterpretation– auch die an der Epidemie gestorbenen aufnehmen.

- Identifizieren Sie die Zustandsgrößen: Wie viele braucht man mindestens ?
- Beschreiben Sie die stattfindenden Prozesse: Welche Veränderungen gibt es und was passiert ?
- Stellen Sie einen Wirkungsgraphen oder ein Simulationsdiagramm auf. Welche Zustandsgrößen sind miteinander verknüpft bzw. welche Zustandsgrößen

können in eine andere übergehen? Mit Wirkungsgraph ist hier ein einfaches Diagramm gemeint: Darstellung von Zustandsgrößen mit Rechtecken, von Übergängen und Koppelungen mit Pfeilen.

- Stellen Sie die Gleichungen auf. Alle Parameter, d.h. Raten für die Vorgänge gesund zu werden bzw. zu sterben seien konstant. Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Infizierte $I(t)$ und noch nicht Erkrankte $G(t)$ aufeinander treffen ist proportional zum Produkt $I(t) * G(t)$.

- Simulieren Sie die Gleichungen mithilfe eines geeigneten Tools: Die Summe der Anfangswerte für die Infizierten, Immunen und Gesunden sollte dabei eins ergeben. Wir arbeiten damit mit relativen Anteilen an der Gesamtbevölkerung. Vorschlag:
  Anteil der Gesunden: 0,999, Anteil der Infizierten 0,001, Anteil der Immunen 0. Wir betrachten den Ausbruch einer neuen Epidemie, bei der sich anfänglich 0,1 % der Bevölkerung angesteckt haben und sich noch keine Imminutäten ausbilden konnten.

  – Lassen Sie den Übergangsparameter zwischen Kranken und Immunen auf einem festen Wert (z.B. 1) stehen und variieren Sie den Ansteckungsparameter (2 – 10). Was lässt sich dabei für den Verlauf der Epidemien feststellen ?

  – Nehmen Sie einen relativ geringen Wert für den Ansteckungsparameter an (z.B. 2). Der Anteil der Kranken an der Bevölkerung betrage 0,1%. Wie hoch muss die Zahl der Gesunden, aber nicht Immunen anfänglich sein, damit die Epidemie ausbricht ?

Aufgabe:
Ausbreitung von Infektionskrankheiten (Mit Geburten- und Sterbefällen)
Wir betrachten wieder eine menschliche Bevölkerung diesmal mit einer festen Geburtenrate (μ), bei der eine Infektionskrankheit ausbricht. Ein gesunder Mensch erkrankt wieder mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, wenn er auf einen bereits erkrankten trifft. Danach ist er wiederum sofort ansteckend. Je nach Krankheitsverlauf stirbt der Mensch oder er wird wieder gesund und ist im folgenden immun. Alle Kinder, die geboren werden, sind gesund und können sich anstecken. Sowohl Gesunde als auch Kranke und Immune können sterben.

- Identifizieren Sie die Zustandsgrößen: Wie viele braucht man mindestens ?

- Beschreiben Sie die stattfindenden Prozesse: Welche Veränderungen gibt es und was passiert ?

- Stellen Sie einen Wirkungsgraphen oder ein Simulationsdiagramm auf.

- Stellen Sie die Gleichungen auf. Alle Parameter, d.h. alle Raten, seien konstant. Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Infizierte $I(t)$ und noch nicht Erkrankte $G(t)$ aufeinander treffen ist proportional zum Produkt $I(t) * G(t)$.

Die Geburtenrate sei fest und nicht abhängig von der Bevölkerungszahl (damit ist sie eine Konstante).

- Simulieren Sie die Gleichungen mithilfe eines geeigneten Tools:
- Setzen Sie die anfänglichen Werte für die Gesunden auf $0,999$ und die Infizierten auf $0,001$. Es haben sich also anfänglich $0,1\%$ der Bevölkerung infiziert.
  - Was passiert bei sehr ansteckenden, aber gutartig verlaufenden Krankheiten ? Die Sterblichkeit ist also gegenüber der normalen nur wenig oder -der Einfachheit halber gar nicht- erhöht ? Setzen Sie die Sterberate gleich der Geburtenrate und den Wert für die Heilungsrate auf 1. Variieren Sie die Ansteckungsrate im Bereich von 2 bis 10 und die Geburten– und Sterberate im Bereich von 0,001 bis 0,1. Was muss gelten, damit die Krankheit ausstirbt und was, damit sie vorhanden bleibt ? Treten hier Schwingungen auf ? Man sollte dabei das dargestellte Zeitintervall recht groß wählen, um 250.
  - Was passiert bei Krankheiten mit hoher Sterblichkeit (z.B. Zehnfache der Geburtenrate), aber geringer Ansteckungswahrscheinlichkeit ?

(Modelle und Beispiele aus [10])

Zusammenfassung Kapitel 1

Im Kapitel 1 wurden die Grundgleichungen des TEM–Modells vorgestellt und ein erster Einblick in die Simulationsoberfläche gegeben. Hierbei wird neben den Schwierigkeiten im Umgang mit Modellen als Abbild der Wirklichkeit die Wirkungsweise der einzelnen Parameter und ihre funktionalen Zusammenhänge erläutert. Es zeichnet das TEM–Modell aus, dass nur empirisch bestimmbare Parameter herangezogen werden.

Kapitel 2

Die Klimaveränderung und der Kyoto–Prozess

2.1 Klimaveränderung

Der Begriff Wetter bezeichnet kurzfristige Phänomene, wie Gewitter oder Ausprägungen wie Warm– oder Kaltfronten. Klima hingegen bezeichnet immer langfristige Trends- meistens 30jährige Durchschnittswerte der Temperatur, der Niederschlagsmenge und des Windes.
Ende des 20. Jahrhunderts wurden die Anzeichen für eine Klimaänderung immer deutlicher. Die Weltdurchschnittstemperatur stieg in den letzten 100 Jahren um 0,6 Grad Celsius an. Die 90iger Jahre des 20. Jahrhunderts waren sehr wahrscheinlich das wärmste Jahrzehnt seit 1 000 Jahren. Die Erwärmung erfolgt dabei nicht gleichmäßig. Über dem Land ist sie stärker ausgeprägt als über dem Meer, und einige Regionen erwärmen sich deutlicher als andere (vergl.[13]). Trotzdem ist der Erwärmungstrend in den letzten Jahrzehnten ein globales Phänomen geworden. Obwohl die Temperaturzunahme auf den ersten Blick unscheinbar und ungefährlich erscheint, sind bereits erste Folgen zu erkennen. Ob das gehäufte Auftreten von Naturkatastrophen, wie die Brände in Australien, die Dürren im Iran und in den USA auf eine Klimaänderung zurückzuführen sind, ist allerdings strittig. Unbestreitbar hingegen wird der Temperaturanstieg u.a. begleitet vom Abschmelzen der Gletscher in den Alpen Europas, am Kilimandscharo in Afrika, einer Änderung im Brutverhalten der Vögel und der Verschiebung der Niederschlagsmuster.
Der Temperaturanstieg beruht voraussichtlich auf einer Erhöhung des Anteils klimawirksamer Gase in der Atmosphäre. Darunter fallen u.a. Kohlendioxid (CO_2), Methan (CH_4), Perfluorierte Kohlenwasserstoffe, Distickstoffoxid (N_2O), Fluorkohlenwasserstoffe und Schwefelhexafluorid (SF_6). Der Anstieg ihrer Konzentrationen erfolgt durch menschliche Aktivitäten - vor allem durch den Ausstoß der Industrie, der Energieerzeuger und der Landwirtschaft. Der CO_2–Gehalt in der Atmosphäre stieg z.B. in den letzten 250 Jahren um 31 % an, der Gehalt an Methan sogar um 150 % (vergl. [13]). Die Gase bewirken den sog. Treibhauseffekt, indem sie die Wärmeabstrahlung der Erde behindern, so dass ein Teil zurück zur Erde gelangt. Steigen die Konzentrationen der Treibhausgase weiter an, so wird auch die Erwärm-

Abbildung 2.1: Temperaturerhöhung im 20. Jahrhundert:Abweichung der globalen Mitteltemperatur vom Durchschnitt der Jahre 1951-1980, Quelle siehe [6]

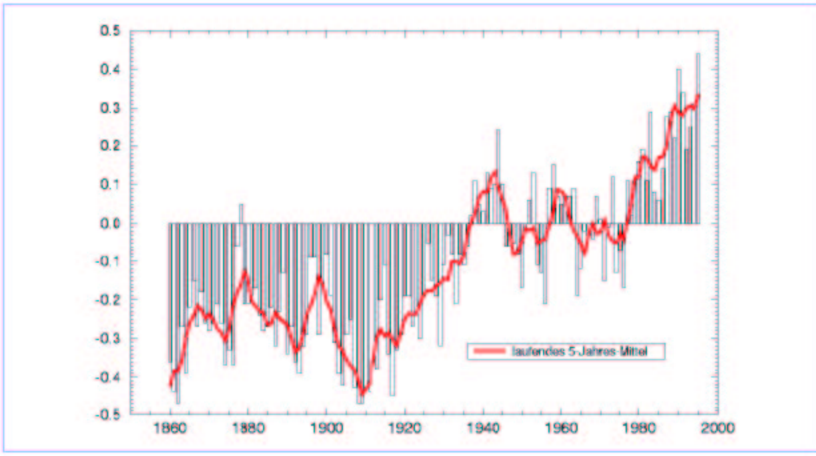
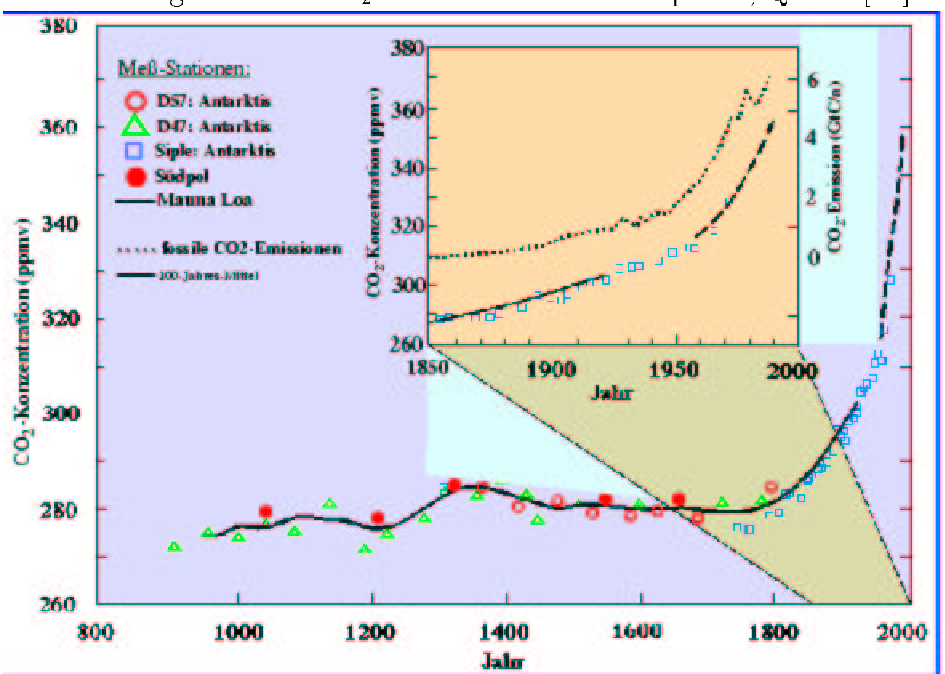
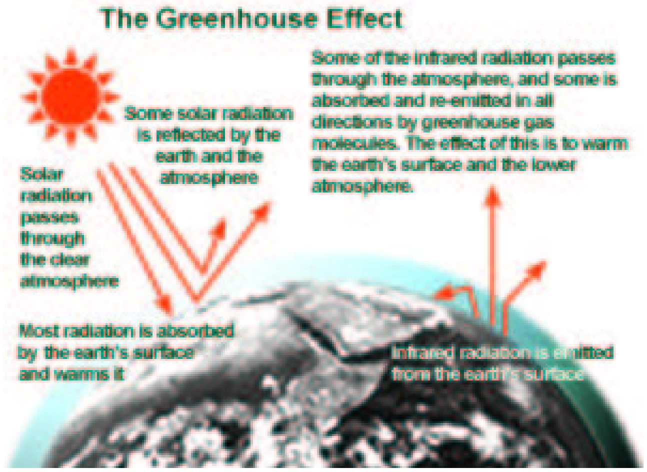


Abbildung 2.2: Der CO_2–Gehalt in der Atmosphäre, Quelle [11]



ung zunehmen. Prognosen gehen von einem weiteren Temperaturanstieg von 1 - 5,4 Grad Celsius aus, je nachdem auf welchem Niveau sich die Treibhausgaskonzentrationen in der Atmosphäre stabilisieren. Literatur zu diesen Themen findet sich u.a. bei [7], [12] und [21] oder

Abbildung 2.3: Der Treibhauseffekt, Quelle [8]



- auf den Internetseiten des WDRs:
  http://online.wdr.de/online/klima/index.phtml

  oder beim

- Hamburger Bildungsserver unter:
  http://www.hamburger-bildungsserver.de/klima/

  sowie in sehr verständlicher Form in der:

- Klimabroschüre der Universität Hamburg, Zentrum für Meeres- und Klimaforschung
  http://www.rrz.uni-hamburg.de/Klima2000/deu/klima.html

Aufgabe:

- Welche Faktoren können das Klima beeinflussen ?
- Beschreiben Sie die Klimaveränderungen und stellen Sie mögliche Folgen zusammen. Sind schon heute Veränderungen erkennbar ?
- Warum ist schon eine so geringe Änderung der Durchschnittstemperatur bedeutsam ?

Aufgabe:

- Wie wirken Treibhausgase ?
- Welche sind anscheinend am wirksamsten ?
- Beschreiben Sie die Rolle des Wasserdampfes.

2.2 Die Klimarahmenkonvention

Die Klimarahmenkonvention wurde 1992 auf dem Weltgipfel für Umwelt und Ernährung in Rio der Janeiro verabschiedet und trat zwei Jahre später in Kraft. Insgesamt haben 181 Staaten und die EU den Vertrag unterzeichnet, 155 davon bereits auf der Konferenz. Die Unterzeichner beabsichtigen, die Treibhausgase auf einem *ungefährlichen Niveau* zu stabilisieren, so dass sich die Ökosysteme an die nicht zu verhinderbaren Änderungen anpassen können. Gleichzeitig wird in der Konvention das Prinzip der gemeinsamen, aber unterschiedlichen Verantwortung der einzelnen Staaten festgelegt. Den Industrieländern als vergleichsweise reichen Ländern und Hauptverursachern der Treibhausgasemissionen wird hierbei die Hauptverantwortung zugeordnet.
Das oberste Organ der Klimarahmenkonvention ist die sogenannte CoP, die *Conference of the Parties*, eine jährliche Konferenz der Vertragsparteien.

2.2.1 CoP: Conference of the Parties und das Kyoto–Protokoll

Die Konferenz der Vertragsparteien nahm 1995 in Berlin ihre Arbeit auf. Hierbei wurde festgestellt, dass die Ziele, die in der Klimarahmenkonvention vereinbart wurden, nicht ausreichend seien. Daher wurde das Berliner Mandat beschlossen, das die Einführung eines Protokolls mit verbindlichen Reduktionsvereinbarungen vorsah. Auf der CoP-3 in Kyoto 1997 wurde schließlich nach langen Verhandlungen das sog. Kyoto–Protokoll verabschiedet, das eine Reduktion der Menge an Treibhausgasen auf 95% von 1990 vorsieht. Das Kyoto–Protokoll wurde zwar bereits 1997 verabschiedet, ist aber bis 2002 noch nicht in Kraft getreten, was an einer Besonderheit des Vertrages selbst liegt. Er kann nur dann in Kraft treten, wenn mindestens 55 Staaten, die gleichzeitig einen Mindestanteil von 55 % der Emissionsmenge von 1990 aufweisen, das Protokoll umsetzen. Da sich die USA zurückgezogen haben, müssen die EU, Japan und Russland das Protokoll ratifizieren, damit dieser Anteil überhaupt noch erreicht werden kann. Die genaue Ausgestaltung, d.h. die Umsetzungen und Modalitäten der Emissionsreduktionen, wurde in Kyoto vertagt und zum Anlass von Verwickelungen und Streitigkeiten, die schließlich zum Abbruch der sechsten Vertragskonferenz in Den Haag führten. Es dauerte bis zur Verhandlung von Marrakesch 2001, bis weitgehende Einigkeit über Vorgaben, Mittel und Kontrollinstrumente erreicht wurde. Das Kyoto–Protokoll wird voraussichtlich bis zum Weltnachhaltigkeitsgipfel im September 2002 von ausreichend vielen Staaten ratifiziert worden sein, so dass es drei Monate danach in Kraft treten kann. Es ist bis Juni 2002 von 84 Staaten unterschrieben und bisher (Juni 2002) von 74 ratifiziert worden. Im Februar ratifizierte das EU–Parlament das Kyoto–Protokoll. Anfang März nahmen auch die EU–Umweltminister die Verpflichtungen an. Somit musste das Protokoll nur noch von den einzelnen Staaten gebilligt werden, damit der Ratifizierungsprozess aus europäischer Sicht abgeschlossen werden konnte, was am 31.5.2002 geschah. Auch Japan stimmte im Juni dem Protokoll zu, so dass die 74 Staaten 35,

8 % der Emissionsmenge von 1990 vertreten.
Aufgabe: Klimakonferenzen

- Machen Sie sich den Unterschied zwischen der Unterzeichnung des Kyoto–Protokolls und der Ratifizierung klar.
- Stellen Sie kurz die Geschichte der Klimakonferenzen dar und beschreiben Sie die dort gefassten Beschlüsse.

Materialien dazu gibt es auf u.a. auf der Agenda 21:Klimagipfel–Seite der learnline unter http://admin.learnline.de/angebote/agenda21/thema/cop6b.htm

Aufgabe: Treibhausgase

- Welche Treibhausgase behandelt die Konvention bzw. das Kyoto–Protokoll ?
- Aus welchen Bereichen – Industrie, Landwirtschaft, Verkehr usw. – stammen sie ?
- Wie sieht die Entwicklung ihrer Emissionen aus ?

Materialien hierzu findet man in der Datenbank: Daten zur Umwelt 2000 des Bundesumweltministeriums unter:
http://www.umweltbundesamt.org/dzu/default.html
beim Punkt Klima.

2.2.2 Instrumente des Kyoto–Protokolls

Um die Reduktion an Treibhausgasen für die Annex–I–Staaten zu vereinfachen, sind im Kyoto–Protokoll sogenannte flexible Mechanismen vorgesehen. Dazu gehören Joint Implementation (JI), Clean Development Mechanism (CDM), Emission Trading (ET). Daneben wird noch die Schaffung natürlicher CO_2–Senken als Anrechnungsmöglichkeit eingeführt.

Joint Implementation und Clean Development Mechanism

Diese Mechanismen betreffen die gemeinsame Umsetzung von Projekten durch mehrere Staaten. Ein Staat kann nicht nur im eigenen Land Treibhausgase reduzieren, sondern auch in anderen Ländern und sich Teile davon anrechnen lassen. Finanziert Land A das Projekt allein, so werden A alle reduzierten Emissionen gutgeschrieben. Der Vorteil für den Geberstaat liegt darin, dass ein solches Projekt im Land B billiger durchzuführen sein kann als im eigenem Land. Joint Implementation–Programme (JI) sind prinzipiell nur möglich zwischen Annex-I–Staaten, d.h. den westlichen Industriestaaten. Es gibt allerdings auch die Möglichkeit mit Entwicklungsländern ähnliche Projekte durchzuführen. Diese Programme werden dann unter den Begriff Clean Development Mechanism (CDM) zusammengefasst. Mithilfe dieser Maßnahmen soll eine möglichst umweltgerechte Entwicklung erreicht werden. Die Kriterien für die Anerkennung von CDM–Programmen sind allerdings strenger als die für JI–Projekte. Beide Programme werden als unterstützende Maßnahmen aufgefasst, weswegen nachwievor die Hauptreduktion im eigenen Land erzielt werden soll. Projekte mit Atomkraft werden ausdrücklich ausgenommen, Senken (siehe unten) dürfen nur begrenzt angerechnet werden. Bei CDM sind das maximal 1 % der Emissionen des Industrielandes von 1990 (vergl. [22], S.5).

Senken

Wälder, Wiesen usw. werden gewissermaßen als CO_2–Speicher angesehen, da sie in ihrer Wachstumsphase Kohlendioxid aufnehmen. Damit kann eine Wiederaufforstung oder Erweiterung eines bestehenden Bestandes als CO_2–Reduktion verstanden werden. Nach Meinung vieler Naturwissenschaftler sind derzeit aber keine Berechnungsgrundlagen bekannt, um das Speicherungspotential eines Bestandes abzuschätzen, da zu große Unsicherheit herrsche (vergl. z.B. [7]). Nichtsdestotrotz werden Senken einbezogen, wofür allerdings Grenzwerte existieren. Dies gilt allerdings nur für den Forstbestand. Für die Anrechnung der Bindung bei Weiden und landwirtschaftliche Flächen wurden keine Maximalwerte vereinbart (siehe [24]).

Emission Trading

Die aus JI, CDM und Anrechnung der Senken gewonnenen Reduktionseinheiten können gehandelt werden. Reduziert ein Land mehr als notwendig, so kann es diese Emissionsrechte verkaufen. Allerdings muss es einen Teil zurückhalten, weil verhindert werden soll, dass ungedeckte Einheiten gehandelt werden. Ein Land, das seine Reduktionsvorgaben nicht erfüllt, darf keine weiteren Einheiten mehr verkaufen.

Aufgabe: Flexible Mechanismen

- Versuchen Sie Pro– und Contrapunkte für die einzelnen flexiblen Mechanismen zu finden.

Quellen sind z.B. [23] oder

- die Seiten des GERMANWATCH unter
  http://www.germanwatch.org/welcome.htm

- Österreichischen Klimabeirat (ACCC) unter
  http://www.accc.gv.at
  unter dem Menupunkt **Climate Basics > Instrumente der Klimapolitik**

- WWF Deutschland unter
  http://www.wwf.de/naturschutz/klima/hintergrundinfos/index.html

Zusammenfassung Kapitel 2

Im Kapitel 2 werden zwei Bereiche: die Klimaveränderung und der Kyoto-Prozess vorgestellt. Dabei wird auch ein Überblick über die einzelnen Instrumente des Kyoto-Protokolls, die sogenannten flexiblen Mechanismen gegeben.

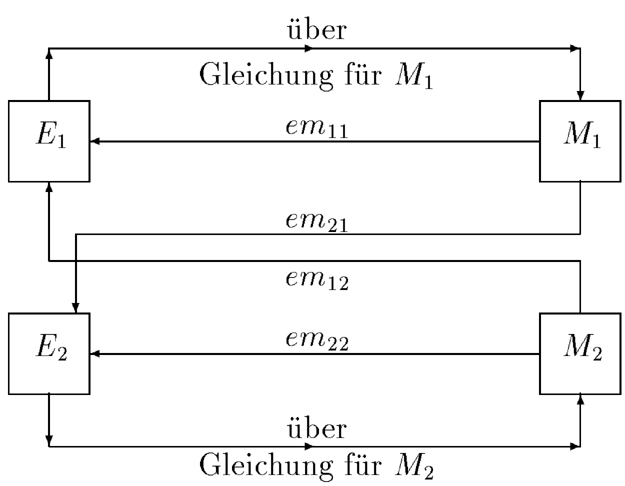
Kapitel 3

Simulationen mit zwei Akteuren

Im Folgendem sind zwei Akteure (Spieler 1 und 2), die sich gegenseitig beeinflussen, am Spiel beteiligt. Das Verhalten der Gleichungen hängt damit von beiden Spielern ab, die sich gegenseitig über die em–Parameter beeinflussen. Wir wollen im Weiteren untersuchen, was passiert, wenn sich die Beeinflussung ändert und betrachten daher wieder die Grundgleichungen des TEM–Modells.

3.1 Grundgleichungen

Da die zwei Akteure sich gegenseitig beeinflussen, sind die entsprechenden Parameter bei den Gleichungen für die Emissionsreduktionen ungleich Null. Die Emissionsreduktionen gehen in die Gleichung für die Mittelaufwendungen ein, was zu der Entstehung einer verdeckte Rückkoppelung führt. Indirekt beeinflusst damit ein Spieler durch die Änderung der Emissionen des anderen seine eigenen. Diese Rückkoppelung wird dadurch, dass nicht nur $E_i(t)$ sondern auch $E_i(t+1)$ eingehen, komplexer.
In der folgenden Abbildung wurde wegen der Übersichtlichkeit die Verbindung mit $E(t+1)$ außer acht gelassen. Gleiches gilt für die Rückkoppelungen von E_i und M_i.

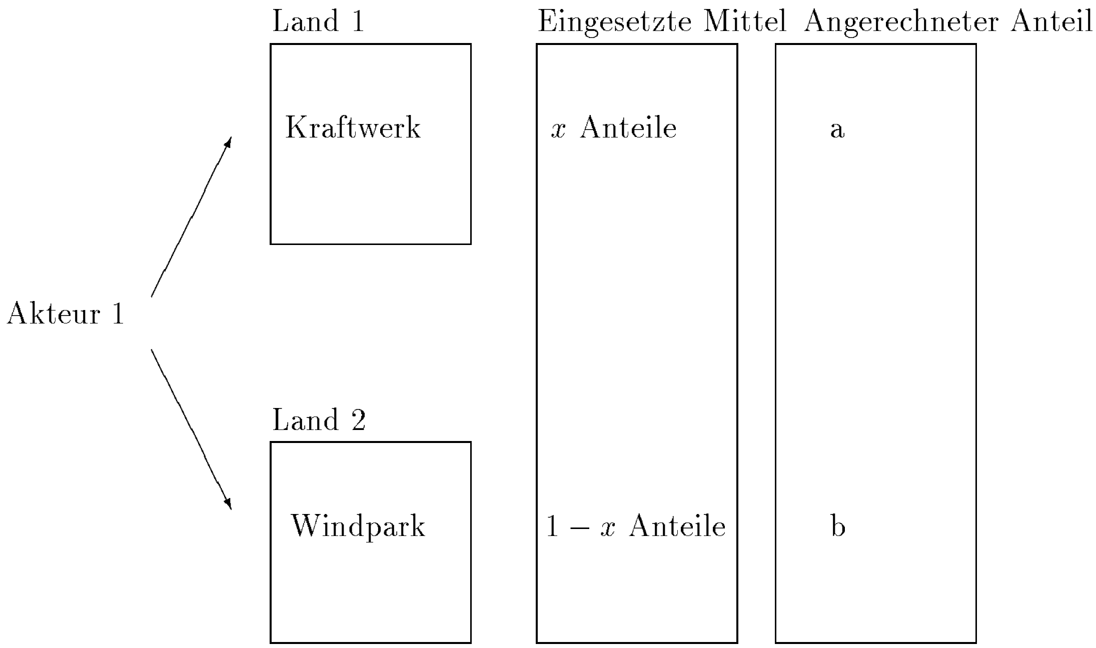


$$
\begin{aligned}
E_1(t+1) &= E_1(t) + em_{11}M_1(t) + em_{12}M_2(t) \\
M_1(t+1) &= M_1(t) - \lambda_1 M_1(t)(M_1^* - M_1(t))(E_1(t) + \phi_1(E_1(t+1) - E_1(t)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2(t+1) &= E_2(t) + em_{22}M_2(t) + em_{21}M_1(t) \\
M_2(t+1) &= M_2(t) - \lambda_2 M_2(t)(M_2^* - M_2(t))(E_2(t) + \phi_2(E_2(t+1) - E_2(t)))
\end{aligned}
$$

Die beiden Akteure können sich über die em_{ij}–Koppelungen gegenseitig beeinflussen. Die em_{ij}–Parameter geben die Auswirkungen auf die Emissionsreduktionen an und bestehen aus zwei (eigentlich drei) Anteilen:
Der Anteil an den vom Spieler j eingesetzten finanziellen Mitteln, der Effektivität der Investition (Effektivität hier: Wieviel CO_2 wird mit einer Geldeinheit reduziert) und schließlich der Anteil, den sich der Spieler -je nach Absprache mit seinem Partner- anrechnen darf. Wenn mehr als ein Projekt zwischen den Partnern existiert, sind das gemittelte Werte.

Beispiel: Spieler 1 und 2 kooperieren miteinander
Akteur 1 errichtet im Land von 2 einen Windpark und im Land von 1 ein Wasserkraftwerk.
Der Parameter em_{11} enthält damit die Auswirkungen aller von 1 eingesetzten Mittel auf die Emissionsreduktionen für 1. Dabei müssen die folgenden Überlegungen berücksichtigt werden.
Spieler 1 teilt seine Mittel auf $\Rightarrow$
x Anteile (relativ gesehen) davon setzt er im eigenem Land (beim Wasserkraftwerk), $1-x$ im Land von 2 ein.
Die Effektivität des Mitteleinsatzes beträgt beim Wasserkraftwerk (Land 1) e_1 und e_2 beim Windpark (Land 2). Damit ergibt eine Geldeinheit, die beim Projekt im Land 1 eingesetzt wird, e_1 Reduktionseinheiten.
Spieler 1 und 2 haben Verhandlungen geführt und sich darauf geeinigt, dass 1 sich im eigenen Land jeweils a und im Land von 2 b Anteile der erreichten Emissionsreduktionen anrechnen darf. Akteur 2 hingegen darf sich auf eigenem Gebiet $1-b$ gutschreiben lassen. Damit ist $em_{11} = xe_1a + (1-x)e_2b$. Der Parameter em_{21} gibt hingegen die Auswirkungen des Mitteleinsatzes von Spieler 1 auf die Emissionsreduktion von 2 an. Daher ist sein Wert: $em_{21} = (1-x)e_2(1-b)$.



Es fällt auf, dass die beiden Parameter offensichtlich voneinander abhängig sind. Eine Änderung von em_{21} bewirkt daher auch immer eine qualitative Änderung der Bedeutung von em_{11}.

3.2 Von Kooperationen bis zu negativen Koppelungen

Falls mehr als ein Akteur am Spiel beteiligt ist, ergeben sich die folgenden Verhaltensmuster als Möglichkeiten, wenn man davon ausgeht, dass beide das Ziel der Emissionsreduktion verfolgen:

- Beide Akteure unterstützen sich in ihren Bemühungen
- Beide Akteure arbeiten nicht zusammen
- Akteur 1 hilft dem zweiten, aber dieser nicht Spieler 1. Und umgekehrt.

Aber welches Verhalten ist jetzt für den einzelnen Akteur das beste ? Die mathematische Disziplin, die sich mit solchen Konfliktsituationen befasst, ist die Spieltheorie.

3.2.1 Kooperation: Kleiner Exkurs in die Spieltheorie

> Strategisches Denken ist die Kunst, einen Gegner zu überlisten, der das gleiche mit Ihnen versucht. [...] Die Wissenschaft vom strategischen Denken heißt Spieltheorie ([4]).

Die Spieltheorie betrachtet eine Menge von Spielern, die sich in einer bestimmten Situation befinden. Im TEM–Modell ist dies die Situation von Kyoto: Alle Unterzeichner des Protokolls müssen ihre Reduktionsvorgaben erfüllen. Dabei müssen sie sich an gewisse Regeln halten. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass alle beteiligten Personen rational handeln und somit alle ihre Aktionen ihrem Ziel dienen. Sie werden also stets die Entscheidung treffen, die für sie den größtmöglichen Nutzen bietet. Das Problem hierbei ist, dass sie meist nicht wissen, was die anderen Beteiligten tun werden. Sie sind stets nur unvollständig über Pläne und Absichten des Gegners informiert. Jede Entscheidung, die von ihnen getroffen wird, ist damit mit einer Unsicherheit verbunden. Bei Spielen existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Arten:

- Kooperative Spiele: Die Spieler verfolgen ein gemeinsames Ziel, zu dessem Erreichen Absprachen getroffen werden. Hierbei sind die Spieler zu jeder Zeit vollständig über die Pläne und Absichten der anderen informiert.

- Nicht–kooperative Spiele: Es existiert weder eine Kommunikation zwischen den Spielern, noch existieren irgendwelche Absprachen. Jeder verfolgt sein eigenes Ziel.

Ein Beispiel für ein Zweipersonenspiel ist das sogenannte Gefangenendilemma (siehe z.B. [19], [20]):
Zwei Akteure S_1 und S_2 haben zusammen ein Verbrechen begangen, wurden gefasst und sitzen nun in Einzelhaft. Ihr Ziel ist es, ein möglichst geringes Strafmass zu bekommen. Der Richter macht nun jedem der Angeklagten ein Angebot. Wenn sie nicht gestehen, dann werden sie beide zu einem Jahr Gefängnis verurteilt. Gesteht jedoch ein Angeklagter, während der andere weiter schweigt, so tritt eine Art Kronzeugenregelung in Kraft. Der geständige Gefangene kommt frei, der andere wird zu zehn Jahren verurteilt. Sollten sich jedoch beide Angeklagte gegenseitig belasten, so können sie mit einer sechsjährigen Haftstrafe rechnen. Ihre Alternativen sehen damit folgendermaßen aus:

	S_2 leugnet	S_2 gesteht
S_1 leugnet	beide 1 Jahr	S_1 10 Jahre, S_2 0
S_1 gesteht	S_1 0, S_2 10 Jahre	beide sechs Jahre

Die obige Tabelle lässt sich auch als Matrix schreiben:

	S_2 leugnet	S_2 gesteht
S_1 leugnet	(1,1)	(10,0)
S_1 gesteht	(0,10)	(6,6)

Die beiden Gefangenen geraten nun in eine Problemsituation. Wüsste S_1, dass S_2 gesteht, wäre seine beste Strategie auch zu gestehen. Wäre er sich auch sicher, dass

S_2 unter keinen Umständen gestehen würde, sollte er, von moralischen Überlegungen abgesehen, gestehen. Der Fall, dass ein Spieler leugnet, kann als Versuch einer Kooperation betrachtet werden. Für die Gemeinschaft ist dies der bestmöglichste Fall, beinhaltet aber, wenn keine Absprachen getroffen werden können, auch das höchste Risiko. Dieses Beispiel kann umdefiniert und für den Fall betrachtet werden, dass die Zahlen keine Strafe, sondern Auszahlungen bedeuten. In diesem Fall versucht der Spieler, für sich die höchste Zahl zu erreichen.

	S_2 kooperiert (leugnet)	S_2 weicht ab (gesteht)
S_1 kooperiert (leugnet)	(3,3)	(0,5)
S_1 weicht ab (gesteht)	(5,0)	(1,1)

Er sucht in diesem Fall die Strategie, die ihm –egal was der Gegner tut– immer den größtmöglichen Gewinn bringt. Diese Vorgehensweise heißt in der Spieltheorie *Auswahl der dominanten Strategien.* Jeder Spieler betrachtet seine Handlungsalternativen, hier bei Spieler 2 *gestehen* oder *leugnen* und vergleicht die möglichen Ausgänge miteinander in Berücksichtigung dessen, was der Gegner tun kann.
Bei einer Entscheidung für *gestehen*, bekommt er 5 ausgezahlt, wenn der Gegner leugnet und 1 sonst. Bei der anderen Wahl erhält er im ersten Fall 3 und im zweiten 0. Wir vergleichen also für S_2 jeweils die Werte einer Zeile miteinander und wählen die Spalte aus, bei der jeweils die höheren Werte vorkamen. Die Strategie *gestehen* ist also für beide Handlungsalternativen, die Akteur 1 vorbringen kann, die beste Lösung. Man sagt, auch die Strategie *gestehen* dominiere die Strategie *leugnen*. Eine Strategie, die von einer anderen dominiert wird, wird vom Spieler nicht berücksichtigt werden und kann daher gestrichen werden.
Analoges führt man für den Spieler 1 durch. Man vergleicht die Werte einer Spalte miteinander und wählt dann die Zeile, in denen jeweils der höhere Wert auftrat. Auch hier ist die beste Antwort auf jede mögliche Strategie des Spielers 2 zu leugnen.
Damit erreicht das Spiel ein Gleichgewicht bei der Strategieauswahl *gestehen, gestehen*. Gleichgewicht bedeutet in diesem Fall: Weicht ein Spieler von der Strategieauswahl ab, während alle anderen gleich bleiben, so wird er sich verschlechtern oder keine Veränderung erfahren, weswegen er nicht abweichen wird. Ein solches Gleichgewicht nennt man auch Nash–Gleichgewicht.

Aufgabe:
Spieler 1 hat die Strategien x_1, x_2 und Spieler 2 y_1, y_2 zur Auswahl.

- Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt von:

	y_1	y_2
x_1	(1,2)	(5,1)
x_2	(0,-200)	(4,-100)

Gleichgewichte können durch das iterative Suchen und Streichen von dominierten Strategien gefunden werden.

Beispiel:

Spieler 1 spielt die Alternativen T, B, Spieler 2 L, C, R. Ihre Auszahlungen sehen folgendermaßen aus:

	L	C	R
T	(4,3)	(2,7)	(1,4)
B	(5,5)	(5,-1)	(-4,-2)

Wir beginnen mit den Strategien von Spieler 2. Offenbar dominiert die Strategie C die Strategie R ($7 > 4$ und $-1 > -2$). Man kann letztere also streichen. Wir erhalten:

	L	C
T	(4,3)	(2,7)
B	(5,5)	(5,-1)

Jetzt betrachten wir die beiden Alternativen von Spieler 1. Wie man sieht ist B die dominante Strategie: $5 > 4$ und $5 > 2$. Wir streichen T.

	L	C
B	(5,5)	(5,-1)

Spieler 2 wird jetzt Strategie L spielen, womit das Gleichgewicht erreicht ist.

Aufgabe:

Spieler 1 hat die Strategien T, M und B zur Auswahl. Spieler 2 L, C und R. Ihre Auszahlungen lauten:

	L	C	R
T	(2,0)	(1,1)	(4,2)
M	(3,4)	(1,2)	(2,3)
B	(1,3)	(0,2)	(3,0)

- Entfernen Sie nacheinander die dominierten Strategien. Welche bleiben übrig?

(Aufgaben und Beispiele aus [2])

Im Fall des Kyoto–Prozesses kann man ein ähnliches Problem wie das des Gefangendilemmas einführen, das sogenannte *Umweltdilemma* (siehe [18], S.19).
In diesem Dilemma befinden sich zwei Staaten, die zwar –im Großen und Ganzem gesehen– durchaus an einer Reduktion der Treibhausgase interessiert sind, dabei aber folgende Präferenzordung zeigen (vergl [18], S. 19):

- Am geeigneten wäre es, wenn sich alle Staaten außer mir an den Aktivitäten zur Reduktionsminderung beteiligen würden

- Am zweitgünstigsten wäre es, wenn sich alle Staaten daran beteiligen würden
- Die dritte Präferenz wäre, dass keinerlei Aktivitäten verwirklicht werden
- Am ungünstigsten wäre es, wenn lediglich ich mich an den Maßnahmen beteiligen würde

Aufgabe:

- Versuchen Sie die einzelnen Präferenzen mithilfe der folgenden Tabelle im Gefangendilemma zu identifizieren. Welcher Punkt entspricht dabei welchem Eintrag ?

	S_2 kooperiert	S_2 weicht ab
S_1 kooperiert	(3,3)	(0,5)
S_1 weicht ab	(5,0)	(1,1)

Die obige Präferenzordnung kann folgendermaßen erklärt werden:
Alle Staaten sind prinzipiell daran interessiert, die Klimaerwärmung zu stoppen. Wenn aber nur ein einziger Staat versucht, seine Treibhausgase isoliert zu reduzieren, dann erreicht er defacto damit kaum eine Wirkung, weil er einen kleinen Anteil ein wenig reduziert, was das Weltklima nicht nennenswert beeinflussen wird. Das einzige, was ihm bevorsteht, sind zusätzliche Kosten. Daher werden Staaten vor dieser Option zurückschrecken, und vor die Wahl gestellt, Treibhausgase alleine zu reduzieren oder gar nicht, die letztere Alternative wählen. Man braucht damit eine Kooperation möglichst vieler Staaten, um etwas zu erreichen. Das Problem hierbei ist, dass es für den einzelnen Staat prinzipiell vorteilhaft ist, sich nicht daran zu beteiligen. Wenn bereits ausreichend viele Staaten ihren Ausstoß an Treibhausgasen senken, verlangsamt sich die Klimaerwärmung ohne das Zutun des Staates, der sich dabei auch Kosten erspart. Damit erreicht er prinzipiell sein Ziel, ohne etwas dafür tun zu müssen. Der Anreiz nicht zu kooperieren ist damit sehr hoch (vergl. [3]).

Man kann als weitere Variation des Gefangenendilemmas auch den Fall betrachten, dass S_1 und S_2 zwei Handelspartner sind. S_1 verkauft S_2 eine Ware. Bezahlt S_2 sie prompt, liegt eine Kooperation vor. Bezahlt er sie erst sehr spät, weil er das Geld anderweitig gewinnbringend anlegen möchte, verhält er sich unkooperativ. In dem Fall entsteht S_1 ein Schaden.
Auch ein beliebtes Beispiel sind zwei Schwarzmarkthändler, die miteinander Waren tauschen. Die Waren werden an den vorher mitgeteilten Orten versteckt. Keiner der beiden Händler weiß, ob der andere wirklich die Ware hinterlegt. Im Einzelfall ist immer die beste Strategie, sich unkooperativ zu verhalten, da man leider nicht weiß, was der andere tun wird. In diesem Fall behält man zumindest die eigene Ware, anstatt am Ende ohne alles dazustehen. Damit allerdings erreichen beide Spieler nicht den optimalen Wert.
Aber was passiert, wenn das Spiel wiederholt wird, die beiden Schwarzmarkthändler

sozusagen eine dauerhafte Handelsbeziehung eingehen ? Ist dann ein solches Verhalten immer noch die beste Lösung auf Dauer ?
Bei einer vorgegebenen Auszahlungsmatrix ist das Spiel leicht zu simulieren, womit man unterschiedliche Strategien überprüfen kann. Es gibt hierzu eine Vielzahl von fertigen Programmen im Internet.
So zum Beispiel bei A. Schnädelbach: *Das iterierte Gefangenendilemma*, unter

- http://www.informatik.uni-mainz.de/ ~astra/schueler/dilemma.html.

Hier können Strategien gegen andere getestet und überprüft werden, welche im Mittel die besten Aussichten hat.
Ebenso bei *Spieltheorie und das Gefangenendilemma* von Tobias Thelen,

- http://www.cl-ki.uni-osnabrueck.de/ ~nntthele/ipd/index.html.

Die benutzte Programmiersprache ist hier allerdings LISP.

Kooperation oder nicht ?

Aufgabe:
Am Spiel bei TEMPI sind jetzt zwei Spieler beteiligt, die ihre Strategien verfolgen. Beide starten mit der Verpflichtung zur Reduktion von fünf Emissionseinheiten und mit anfänglichen Mittelaufwendungen von 0,1. Nehmen wir an, jeder Spieler will nur für sich sein Ziel erreichen, ist am Gesamtziel nicht interessiert und auch nicht, wie schnell es erreicht wird.

- Ist dann eine Kooperation immer der günstigste Fall oder lässt sich der andere Akteur quasi ausnutzen ?
- Was aber kann passieren, wenn der Gegner sich genauso verhält ?
- Ist die Parameterwahl aus Kapitel 1 noch immer geeignet ?

3.2.2 Mathematischer Exkurs: Gleichgewichte

Es ist schon aufgefallen, dass die Simulationen häufig in festen Punkten münden, aus denen die Emissionsreduktionen und Mittelaufwendungen nicht mehr hinausgehen. Das System hat hier ein sogenanntes Gleichgewicht erreicht.
Gleichgewichte oder genauer Fließgleichgewichte, bei Differenzengleichungen auch Fixpunkte genannt, liegen vor, wenn keine sichtbaren Änderungen der Zustandsgrößen zu erkennen sind. Bei Differenzengleichungen gilt dann $X(t+1) = X(t)$ und bei Differentialgleichungen $\frac{d}{dt}X(t) = 0$, d.h. es treten keine Veränderungen mehr auf. Betrachtet man eine Population mit den Änderungen *Sterben* und *Geborenwerden*, handelt es sich um ein Gleichgewicht, wenn sich die beiden Vorgänge ausgleichen, also genausoviele Tiere geboren werden wie sterben. Die Gesamtzahl bleibt damit gleich, obwohl die Änderungen nachwievor stattfinden. Bei der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}B(t) = mB(t) - dB(t)$ aus Kapitel 1, die die Veränderung der Hefezellenkultur beschrieb, gilt damit:

$\frac{d}{dt}B(t) = 0$ oder $mB(t) - dB(t)$, also wie gesagt eine zahlenmäßige Übereinstimmung von Sterbevorgang und Geborenwerden.
Ein anderes aber ähnliches Beispiel für ein solches dynamisches Gleichgewicht ist ein Wassertank mit einem Zufluss und Abfluss. Es fließt immer eine bestimmte Menge an Flüssigkeit nach, was hier mit $I(t)$ bezeichnet werden soll. Gleichzeitig fließt immer Flüssigkeit ab und das proportional zur vorhandenen Menge $M(t)$.

Zufluss	$\Rightarrow$	Wassertank	$\Rightarrow$	Abfluss
Zufluss $I(t)$	$\Rightarrow$	$M(t)$	$\Rightarrow$	Abfluss $cM(t)$

Auch hier liegt ein Gleichgewicht vor, wenn sich Zu– und Abfluss ausgleichen, d.h., wenn gilt $I(t) = cM(t)$. Obwohl nachwievor Wasser zu– und abströmt, bleibt die Wassermenge im Tank konstant.
Das Interesse an Gleichgewichten rührt daher, dass man mit ihrer Hilfe Aussagen über das Verhalten einer Gleichung machen kann, die sich nicht geschlossen lösen lässt. Man modelliert eine Größe im Allgemeinen, weil man wissen will, was mit ihr passiert, also ob sie gegen Unendlich geht oder einen festen Wert annimmt. Kann man die Gleichung, die im Modell verwendet wurde, lösen, dann ist man fertig. Schließlich kennt man jetzt das gesamte System. Ansonsten kann man den Weg über die Gleichgewichtspunkte nehmen. Die Forderung für einen Gleichgewichtspunkt ist -wie bereits erwähnt-, dass keine sichtbaren Änderungen vorliegen. Wir wollen jetzt die Bedingungen für das Vorkommen eines Gleichgewichtspunktes mathematisch formulieren.
Allgemein bei Differenzengleichungen:

$$X(t+1) = f(X(t))$$

Es liegt ein Gleichgewicht vor, wenn:

$$X(t+1) = X(t) \Rightarrow f(X(t)) = X(t)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} E_1(t+1) &= E_1(t) + em_{11}M_1(t) \\ M_1(t+1) &= M_1(t) - \lambda_1 M_1(t)(M_1^* - M_1(t))(E_1(t) + \phi_1(E_1(t+1) - E_1(t))) \end{aligned}$$

Wir suchen jetzt die Gleichgewichtspunkte E^S und M^S, für die gilt
$E_1^S(t+1) = E_1^S(t)$ und $M_1^S(t+1) = M^S S_1(t)$.
Aus $E_1(t+1) = E_1(t)$ folgt: $em_{11}M_1(t) = 0$. Da $em_{11} \neq 0$ gilt $\Rightarrow M^S(t) = 0$. Wenn wir gemeinsame Gleichgewichte für $E(t)$ und $M(t)$ betrachten, müssen beide Gleichungen gleichzeitig ein solches annehmen. Die erste kann nur einen einzigen solchen Punkt besitzen. Diesen setzen wir in die zweite Gleichung ein, um zu überprüfen, unter welchen Voraussetzungen er auch dort die Bedingung erfüllt. Wie man sehr

leicht sieht, ist das immer der Fall. Das Problem hier ist, dass der Wert für E beliebig ist. Der Wert von E, den das System gerade hatte, als die Mittelaufwendungen auf 0 fielen, ist der Gleichgewichtswert. Der ist leider nicht so berechenbar.

Übung:

Logistische Wachstumsgleichung:

$$X(t+1) = rX(t)(K - X(t))$$

- Setzen Sie $X(t+1) = X(t)$ und berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte

Wie man sieht, haben wir bis jetzt nur die Existenz von Gleichgewichtspunkten gezeigt. Wenn es sie gibt, und das System in ihnen ist, dann bleibt es auch da, weil keine Änderungen mehr auftreten. Es bleibt die Frage offen, ob das System überhaupt in einen Gleichgewichtspunkt hineinläuft. Und was passiert, wenn es in ihm ist und leicht gestört wird ? Bei einer Population z.B. wenn neue Tiere einwandern. Kehrt es in den Gleichgewichtspunkt zurück oder nimmt es vollkommen neue Werte an ?

Die Frage, die also noch zu klären ist, ist die Stabilität der Gleichgewichtspunkte. Eine globale Stabilität liegt vor, wenn das System bei beliebigen Startbedingungen im Gleichgewichtspunkt endet. Diese Eigenschaft ist meist recht schwer zu zeigen. Eine lokale Stabilität liegt vor, wenn das System nach einer leichten Störung wieder zurückkehrt.

Die lokale Stabilität ist im Allgemeinen leichter zu überprüfen. Man wählt zumeist den Weg über einen Störungsterm. Das System $X(t)$ sei also im Gleichgewichtspunkt X^S, d.h. es gelte $X(t) = X^S = f(X^S)$. Dort wird es ausgelenkt: $X(t) = X^S + Z(t)$, wobei $Z(t)$ dann als Störungsterm bezeichnet wird. Gilt jetzt, dass die Störung $Z(t)$ wieder gegen Null geht, wenn die Zeit vergeht, dann ist der Gleichgewichtspunkt X^S stabil.

System $X(t+1) = f(X(t))$ im Gleichgewicht, also $X(t) = X^S = f(X^S)$
$\downarrow$
Störung Z(t) auf das Gleichgewicht $\Rightarrow$ Auslenkung um $Z(t)$
$\downarrow$
System jetzt bei $X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X(t)) = f(X^S + Z(t))$
$\downarrow$
Was passiert ?

Wir betrachten also:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X(t)) = f(X^S + Z(t))$$

Ein Problem ist hier die Funktion f, die beliebig kompliziert werden kann. Zudem konnten wir die Gleichung schon mit $X(t)$ nicht lösen. Sonst würden wir auch nicht mit den Gleichgewichtspunkten arbeiten. Wir müssen also einen Weg finden, f auf eine unkompliziertere Methode abzuschätzen. Dazu verwendet man die sogenannte Taylorreihe. Aus dem Unterricht ist vielleicht bereits bekannt, das man bei numerischen Integrationen die Funktion mithilfe der Ableitungen, d.h. Steigungen, approximiert. Etwas Ähnliches macht die Taylorreihe:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t) + \frac{d^2}{dX^2(t)} f(X^S) Z^2(t) + ...$$

Sie approximiert damit $f(X^S + Z(t))$ mit Hilfe der Ableitungen von f nach $X(t)$. Man vernachlässigt jetzt alle Glieder höherer Ordnung und betrachtet eine Näherung mithilfe der ersten Ableitung:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t)$$

Man behauptet damit, dass sich $f(X^S + Z(t))$ in der Nähe von X^S durch die Steigung multipliziert mit dem Betrag der Auslenkung approximieren ließe. Man zieht also gewissermaßen eine Gerade mit der Steigung $f'(X^S) = \frac{d}{dX(t)} f(X^S)$ durch den Gleichgewichtspunkt. Das ist nur dann durchführbar, wenn man die Glieder höherer Ordnung (die quadratischen, kubischen usw. Terme) der Taylorapproximation vernachlässigen kann. Je größer $Z(t)$ wird, desto höher ist aber das Gewicht, das diese Ausdrücke bekommen. Aus diesem Grund kann mithilfe der Taylorreihe nur die lokale Stabilität überprüft werden.

$$X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t)$$

Da X^S ein Gleichgewichtspunkt ist, gilt $X^S = f(X^S)$. Damit haben wir:

$$Z(t+1) = \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t) = \lambda Z(t)$$

Das ist die exponentielle Wachstumsgleichung mit der Lösung: $Z(t) = Z_0 \lambda^t$. Wir wissen, dass $Z(t)$ für $|\lambda| > 1$ wächst. Für $\lambda = 1$ bleibt es auf dem Anfangswert Z_0 stehen. Damit verschwindet die Störung nur, wenn $|\lambda| < 1$ gilt. In dem Fall ist der Gleichgewichtspunkt stabil. Wir haben hier nur den eindimensionalen Fall betrachtet. Wenn mehr als eine Zustandsgröße vorliegt, dann kann Analoges durchgeführt werden.

Vorgehensweise:
Bestimmung der Fixpunkte und ihrer Stabilität bei Differenzengleichungen

- Ausgangsgleichung:
$$X(t+1) = f(X(t))$$
- Berechne Fixpunkt X^S mit $X^S = f(X^S)$
- Bestimme Ableitung $\frac{d}{dX(t)} f(X(t))$
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| < 1$, dann ist der Fixpunkt stabil
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| > 1$, dann ist der Fixpunkt instabil
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| = 1$, dann ist so keine Aussage möglich

Übung:

- Welcher der beiden oben berechneten Gleichgewichtspunkte der logistischen Abbildung ist stabil ?

Auch bei Systemen mit mehr als einer Größe können diese Untersuchungen durchgeführt werden und verlaufen analog. Es wird allerdings darauf verzichtet, da sich herausstellt, dass beim TEM-Modell aufgrund der verwendeten Struktur die Frage der Stabilität nicht auf diese Weise geklärt werden kann.

Ein anderes Verhaltensmuster: Schwingungen

Aufgabe:
Machen Sie folgenden Versuch:

- Setzen Sie die Parameter im TEM–Modell für die wechselseitigen Beeinflussungen auf -1 und starten Sie das System mit ungleichen Startwerten für die Mittelaufwendungen (λ sollte dabei für alle Akteure gleich und ϕ Null sein). Was passiert und warum tritt dieses Verhalten auf ?
- Gibt es eine Möglichkeit die Schwingungen auslaufen zu lassen ? (Tipp: Man variiere die Parameter (außer den em_{ij} natürlich))
- Gibt es regelmäßige Schwingungen, d.h. solche, deren Amplitude sich nicht mehr ändert ?

Schwingungen beim einfachen Räuber-Beute-System

Wir betrachten je eine Population von Schneehasen und Luchsen. Die Luchse ernähren sich ausschließlich von den Schneehasen. Wir nehmen folgende Punkte an:

- Die Nahrungsvorräte der Schneehasen sind unbegrenzt.

- Wenn die Schneehasen nicht von den Luchsen gefressen werden würden, würden sie daher mit der Rate b wachsen. Das Wachstum sei proportional zur Dichte (oder Anzahl) der Hasen. Somit gilt für das System:
  Schneehasen ohne Luchse:

$$\frac{d}{dt}H(t) = bH(t)$$

- Die Luchse ernähren sich ausschließlich von den Schneehasen.

- Gibt es keine Schneehasen, dann sterben die Luchse mit der Zeit aus. Die Sterberate ist der Dichte der Luchse proportional.

$$\frac{d}{dt}F(t) = -mF(t)$$

- Trifft ein Luchs einen Schneehasen, dann wird letzterer gefressen. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches Treffen ist proportional zu dem Produkt der Dichten der Luchs– und Schneehasenpopulation $F(t)H(t)$. Das heißt prinzipiell nichts anderes, als das die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen steigt, je mehr Tiere es gibt. Das Wachstum der Luchspopulation ist ebenfalls abhängig von der Häufigkeit des Zusammentreffens, gleiches gilt für das Abnehmen der Hasenpopulation. Der Proportionalitätsfaktor wird im Weiteren mit r bezeichnet.

Die Gleichungen haben damit die folgende Form:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= -mF(t) + rF(t)H(t)\\ \frac{d}{dt}H(t) &= bH(t) - rF(t)H(t)\end{aligned}$$

Das Modell stammt von Lotka (1910; 1925) und wurde benutzt, um den Zusammenhang von Hasen und Luchsen in einem Gebiet in Kanada zu beschreiben. (Eine Pelzkompanie war sehr interessiert an diesem Thema und lieferte Daten.) Diese Gleichungen sind nicht explizit lösbar.

Aufgabe:

- Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte für beide Gleichungen in Abhängigkeit der Parameter m, b und r. Bei Differentialgleichungen gilt wie bei Differenzengleichungen, dass im Gleichgewichtszustand keine Veränderungen mehr stattfinden. Es muss also gelten: $\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}H(t) = 0$.
  Fangen Sie dabei bei einer Gleichung z.B. $\frac{d}{dt}F(t) = 0$ an, berechnen Sie dort die Nullstellen und setzen Sie diese in $\frac{d}{dt}H(t) = 0$ ein.

- Simulieren Sie das System mit einem geeigneten Tool (z.B. Dynasys).

- Geben Sie Werte für die Parameter m, b und r vor.
- Starten Sie in der Nähe des zweiten Gleichgewichtspunktes, aber nicht in ihm. Was passiert ?
- Lassen Sie den Startwert für die Hasen auf dem altem Wert stehen und variieren Sie den für die Luchspopulation. Wie verhalten sich dabei die Kurven ?

Zusammenfassung Kapitel 3

Im Kapitel 3 wird das Modell auf zwei Akteure erweitert und die dabei entstehenden neuen Situationen analytisch untersucht. Da sich Joint Implementation durch ein kooperatives Vorgehen auszeichnet und das TEM–Modell in der Lage ist, diesen Mechanismus abzubilden, wird ein allgemeiner Einblick in die Spieltheorie gegeben. Hierbei wird das sogenannte Umweltdilemma vorgestellt, das als Sonderfall des Gefangendilemmas angesehen werden kann. Bei der allgemeinen Beschreibung von Differenzengleichungen wird die Bedeutung von Gleichgewichtspunkten erläutert, die als Zielpunkte des Kyoto–Protokolls aufgefasst werden können.

Kapitel 4

Simulationen mit drei Akteuren

4.1 Grundgleichungen

Wir beschäftigen uns jetzt mit allen drei möglichen Akteuren, die sich gegenseitig beeinflussen können. Mehr als drei Akteure zu betrachten, ergibt keinen weiteren wesentlichen Informationsgewinn mehr. Die Grundgleichungen lauten nachwievor:

$$
\begin{aligned}
E_i(t+1) &= E_i(t) + \sum_{k=1}^{3} em_{ik} M_k(t) \\
M_i(t+1) &= M_i(t) - \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))(E_i(t) + \phi_i(E_i(t+1) - E_i(t)))
\end{aligned}
$$

4.1.1 Von Kooperationen bis zu negativen Koppelungen

Der Unterschied zu dem Modell mit zwei Akteuren ist nun, dass je zwei Spieler eine Art Koalition bilden können, auch wenn sich ein Akteur unkooperativ verhält.

Kooperationen zwischen zwei Akteuren, unkooperatives Verhalten von Akteur 3

Mit dem zugrundeliegenden TEM-Modell lässt sich auch der Fall eines nicht am Kyoto-Prozess interessierten Akteures abbilden:

Übung: Fallbeispiel 1
Die Akteure 1 und 2 einigen sich auf eine Kooperation für den Kyoto-Prozess. Sie möchten ihre Emissionen verringern. Der dritte Akteur will weder am Joint Implementation–Prozess teilnehmen, noch überhaupt Emissionen reduzieren. Anstelle dessen vertritt er die Interessen seiner Energieerzeuger, die auf konventionelle Kraftwerke setzen und in den Ländern der anderen Betriebe übernommen haben. Er fördert seine Industriebetriebe mit einem jährlichen festen Betrag.

- Versuchen Sie das Verhalten des Spielers 3 im Rahmen der Grundgleichungen abzubilden.

Die Akteure 1 und 2 beginnen mit einer Reduktionsverpflichtung von 5 Einheiten. Welche Auswirkung kann das Verhalten von Spieler 3 haben ?

- Untersuchen Sie z.B. was passiert, wenn die Parameter em_{i3} betragsmäßig kleiner sind als die positiven Koppelungen:
  - Erreichen die Spieler 1 und 2 ihr Ziel von Null Emissionsreduktionseinheiten ?
  - Können sie es halten und wenn ja, wieviele Mittel müssen sie dafür aufwenden ?
  - Stabilisieren sich die Mittelaufwendungen, wenn ja auf welchen Niveau ?
- Wie sieht es bei Extremwerten für die negative Beeinflussung durch Akteur 3 aus, z.B. -1 ?
- Welche Auswirkungen hat es, wenn sich die Aufmerksamkeitsparameter der anderen Spieler ändern ?

Es empfiehlt, sich $\phi > 1$ zu setzen, da die Akteure sonst zu schnell einen Mitteleinsatz von 1 erreichen, aus den sie nicht mehr herauskommen (numerisches Problem).

Fallbeispiel 2:
Alle drei Akteure kooperieren.

- Welche Ergebnisse:
  Versuchen Sie den geringstmöglichen Mittelaufwand und die kürzeste Zeit zu ermitteln, die die Akteure benötigen, wenn sie wieder ein Kontingent von 5 Reduktionseinheiten zu erfüllen haben ?

Fallbeispiel 3: Unkooperatives Verhalten
Alle drei Akteure kooperieren nicht, wollen aber trotzdem ihre Ziele erreichen. Das Verhalten kann -wie schon bei zwei Akteuren- zu Schwingungen führen, aber auch ein besonderes Verhalten zur Folge haben:
Chaotisches Verhalten beim TEM–Modell:
Treffe die folgende Auswahl an Parametern (siehe [18]:

Akteur	*Emissionsred.*	*Mittel*	*Budget*	ϕ	λ	*em–Matrix*		
1	-1	0,3	1	10	0,82	1	-0,7	-0,3
2	0,6	0,1	1	10	0,25	-0,8	1	-0,2
3	0,5	0,2	1	10	0,4	-0,9	-0,1	1

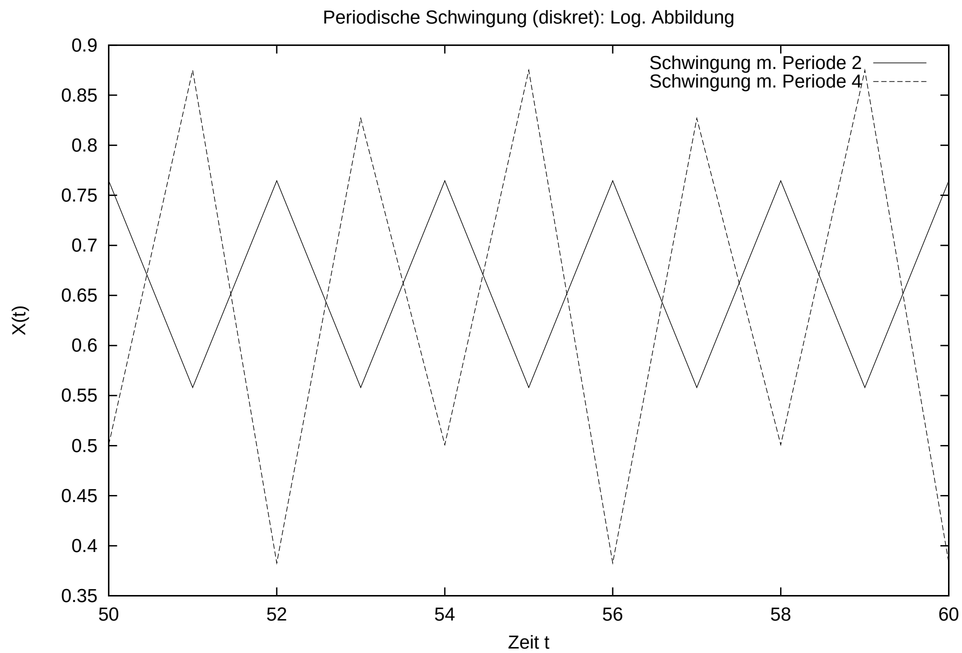
- Was fällt auf ?
- Was passiert, wenn man ϕ auf 11 setzt ?

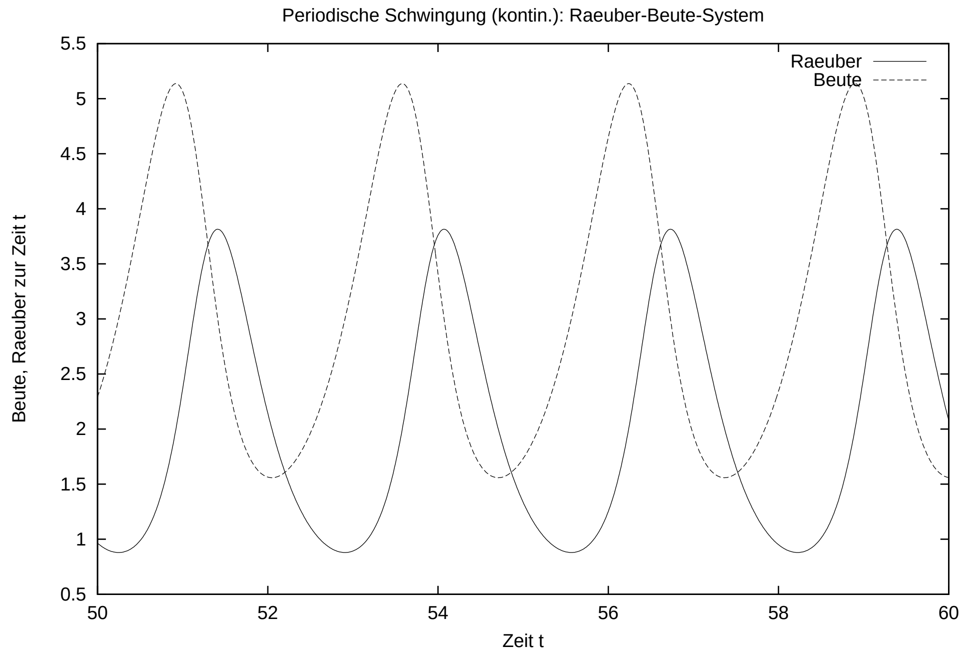
4.2 Mathematischer Exkurs: Chaos

Von Schmetterlingen und seltsamen Attraktoren

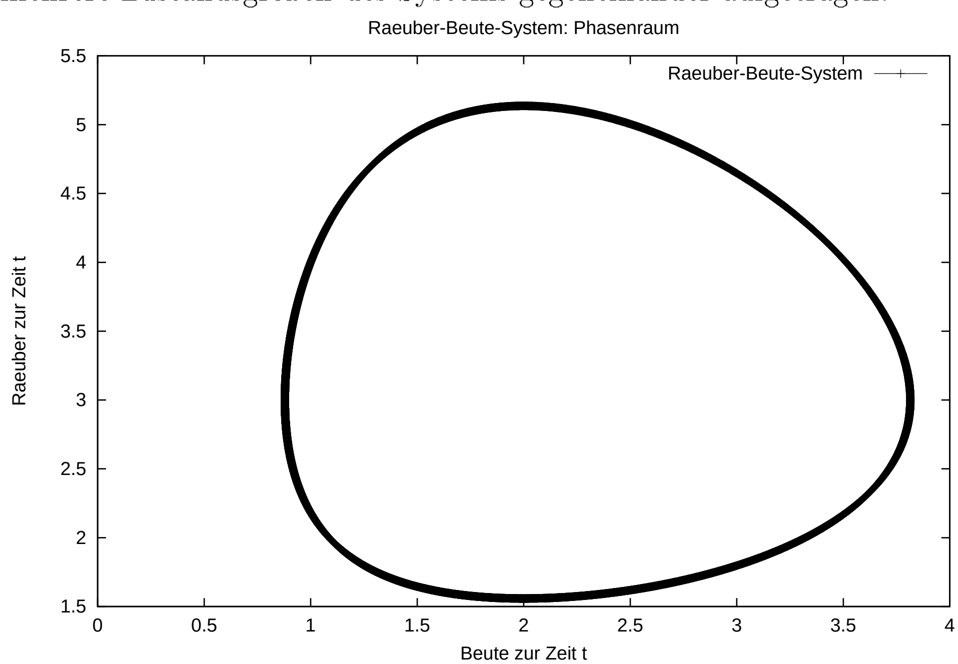
1963 entdeckte Edward Lorenz eine neue Form von Gleichgewichtspunkten bzw. Attraktoren, bei denen die System ein bis dahin unbekanntes Verhalten zeigten. Zur

Erinnerung: Gleichgewichtspunkte sind diejenigen Stellen, an denen das System zur Ruhe kommt und keine sichtbaren Änderungen mehr stattfinden. Bei einem einfachen Populationsmodell -mit nur den Vorgängen: Sterben und Geborenwerden - liegt ein Gleichgewicht genau dann vor, wenn sich diese beiden Punkte ausgleichen. Vor der Entdeckung Lorenz' waren nur einfache Gleichgewichte und periodisches Verhalten als mögliche Formen von Attraktoren bekannt. Periodisches Verhalten bezeichnet –wie der Name schon sagt– Schwingungen mit einer festen Frequenz. Nach einer bestimmten Zeitspanne gelangt das System wieder in den Ausgangspunkt zurück. Bei z.B. einer Schwingung mit Periode vier werden damit insgesamt vier Punkte immer wiederholt. Jeder dieser Punkte wird nach vier Zeiteinheiten wieder erreicht und keinesfalls vorher. Schwingungen treten bei diskreten und kontinuierlichen Systemen auf.





Hier fand sich eine neue Variante, die den Namen seltsamer Attraktor erhielt. Die Darstellung des seltsamen Attraktors erfolgt zumeist in einer Abbildung, die Phasenraum genannt wird. Dort wird nicht eine Zustandgröße gegen die Zeit, sondern mehrere Zustandsgrößen des Systems gegeneinander aufgetragen.



Obgleich beim Lorenz–Attraktor zu erkennen ist, dass nachwievor eine Art Begrenzung der Bahnen existiert, kann die genaue Position des Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht vorhergesagt werden. Obwohl seltsame Attraktoren zuerst bei chaotischen Gleichungen entdeckt wurden, wird der Begriff heute für Gleichgewichtspunkte mit fraktalen Eigenschaften gebraucht. Der Lorenz–Attraktor besitzt diese ebenfalls. Die Gleichungen, die bei der Entdeckung des chaotischen Attraktors benutzt wurden, haben eigentlich eine recht einfache Form. Prinzipiell beschreiben sie Konvektionszellen in der Atmosphäre (aber das ist hier weniger wichtig).

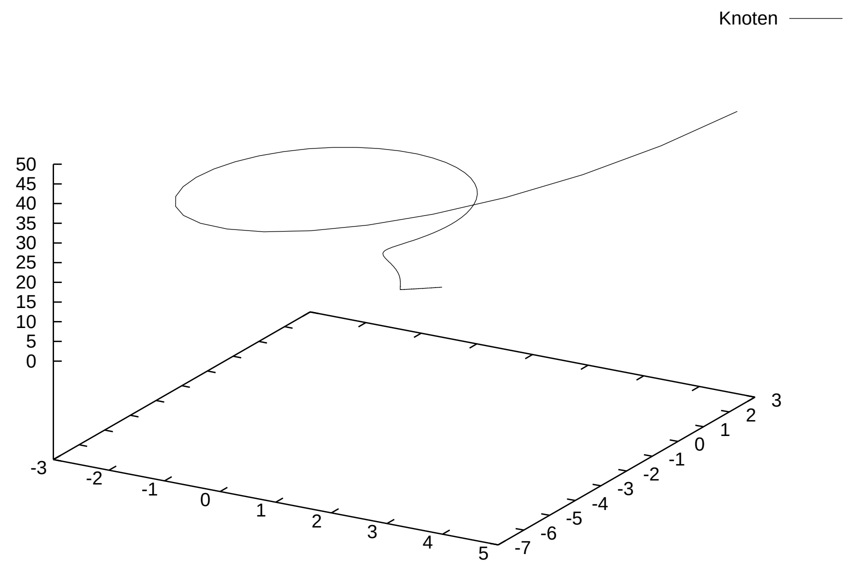
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned}$$

Für bestimmte Kombinationen der Parameter σ, r und b erreichen die Zustandsgrößen weder Gleichgewichtspunkte, noch Zyklen, noch gehen sie gegen Unendlich. Zunächst einmal wollen wir uns mit den Gleichgewichten der Lorenzgleichung beschäftigen.

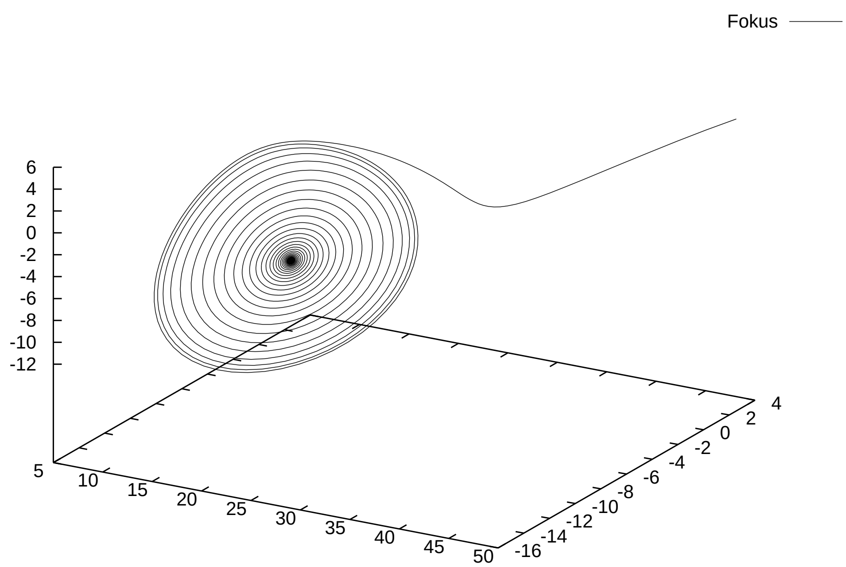
Aufgabe:

- Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte der Lorenzgleichung in Abhängigkeit von σ, r und b. Setzen Sie also $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ jeweils gleich Null.
- Wieviele Gleichgewichtspunkte gibt es und wann (d.h. für welche Kombinationen für σ, r und b) existieren sie ?

Wenn man alle Parameter außer r unverändert (meistens $b = 8/3$ und $\sigma = 10$) lässt, kann man ein interessantes Verhalten bei der Variation von r erkennen. Wir hatten bereits gesehen, dass zwei der drei Gleichgewichtsparameter nur dann existieren, wenn $r > 1$ gilt. Zu Beginn haben wir damit nur einen einzigen stabilen Gleichgewichtspunkt, den Nullpunkt. Wird r hingegen größer als eins, so wird der Nullpunkt instabil, und die beiden anderen neuhinzugekommenden stabil. Je nachdem mit welchen Startpunkt das System beginnt, wird es sich auf den einen oder den anderen Gleichgewichtspunkt zu bewegen.

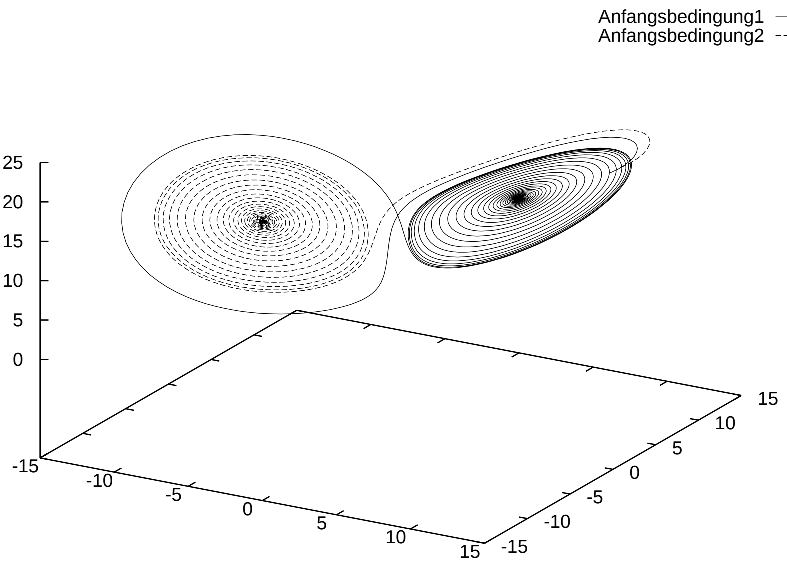


Ab einen Wert von 1,346 ändert sich das Verhalten des Systems in der Nähe der Gleichgewichtspunkte. Zuvor lief es auf direktem Weg in sie hinein und zeigte damit eine monotone Annäherung (stabiler Knoten). Jetzt umkreist es die beiden Punkte in immer enger werdenden Bahnen bis es schließlich in ihnen endet (stabiler Fokus).

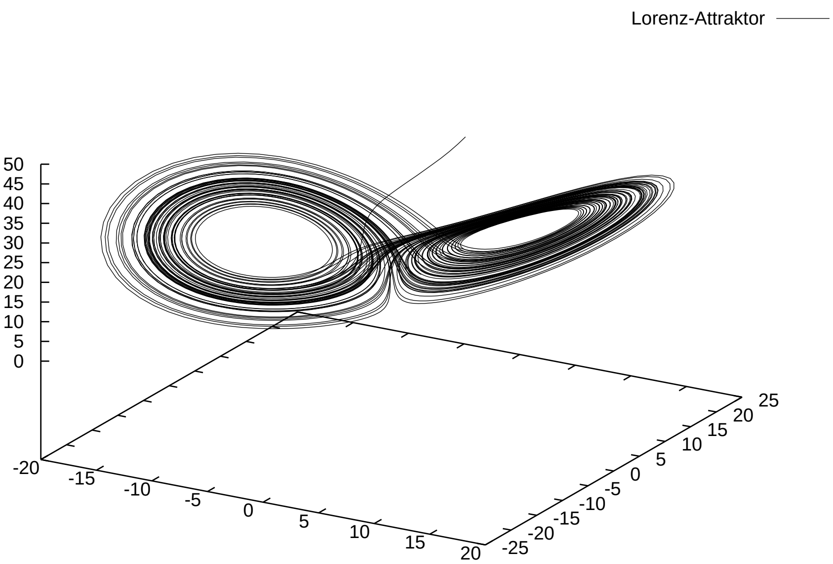


Dieses Verhalten wird vom System bis zu einem Wert von 13,926 aufrecht erhalten. Danach zeigt sich eine Struktur, die sich instabiler Grenzzyklus nennt. Diese Gebilde sind geschlossenene Bahnen, die innen entweder einen (meist) instabilen Knoten oder einen instabilen Fokus enthalten (vergl.[16], S. 101). Der wesentliche Unterschied zum normalen periodischen Verhalten, besteht darin, dass Periode und

Amplitude nicht von den Anfangsbedingungen des Systems abhängen.
Im vorliegendem Fall sind die Grenzzyklen allerdings selbst instabil, d.h. sie werden nicht angenommen. Sie trennen vielmehr den Raum um einem Gleichgewichtspunkt in zwei Teile:
Nur diejenigen Lösungsbahnen, die in das Innere des Grenzzyklus eines Gleichgewichtspunktes gelangen, konvergieren gegen ihn. Das kann dazu führen, dass zwei Lösungen, die mit leicht unterschiedlichen Startwerten beginnen, in unterschiedliche Attraktoren hineinlaufen. Die Radien der Grenzzyklen werden mit zunehmenden r immer kleiner. Die Bahnen des Systems kreisen häufiger um die beiden Gleichgewichtspunkte herum, bis sie schließlich in einem münden.



Wenn r schließlich den Wert von 24,74 übersteigt, so beginnt das chaotische Verhalten, das typisch für den Lorenzattraktor ist. Die beiden Gleichgewichtspunkte werden vom System umkreist. Irgendwann (nicht vorherzusagen) verlässt das System den einen Gleichgewichtspunkt und wechselt zum nächsten. Dabei ist auffällig, dass sich die dabei entstehenden Bahnen nie kreuzen.



Im Internet gibt es viele Seiten mit Applets, mit deren Hilfe man die Lorenzgleichung nachzeichnen kann, so z.B. unter

- http://www.robert–doerner.de/Lorenz-System/lorenz-system.html
- http://kong.apmaths.uwo.ca/ ~bfraser/version1/nonlinearlab.html

Die Gleichungen sind eines der Standardbeispiele bei der Einführung in das Gebiet der chaotischen Systeme und finden sich in jedem Buch über dieses Thema. Es fehlt bisher noch die eigentliche Definition für chaotisches Verhalten. Eine Gleichung (bzw. ein System) zeigt chaotisches Verhalten, wenn folgende Punkte erfüllt sind:

- **Starke(d.h. sensible) Abhängigkeit von den jeweiligen Anfangsbedingungen**
- Es liegt ein **aperiodisches** (kein Punkt wird zweimal durchlaufen) **beschränktes** (ein Gebiet wird nicht verlassen) **Verhalten** vor

Die erste Bedingung sagt aus, dass wenn zwei Lösungen der Gleichung mit leicht anderen Anfangswerten starten, sie sich nach einiger Zeit vollkommen unterschiedlich verhalten. Aperiodisch bedeutet, dass keine regelmäßigen Schwingungen existieren, das System wiederholt sich damit nicht. Kein Punkt des Phasenraumes wird zweimal angenommen. Gleichzeitig bleibt das System aber innerhalb eines beschränkten Gebietes, d.h. die Lösungen wachsen nicht monoton an. Ansonsten würde das exponentielle Wachstum der zweiten Bedingung entsprechen.
Beide Bedingungen werden vom Lorenzattraktor erfüllt. Aufgrund der ersten Bedingung formulierte Lorenz den sog. Schmetterlingseffekt beim Wetter. Da komplexe Systeme eine sehr große Abhängigkeit von den Anfangswerten aufweisen und da das Wetter ebenfalls ein äußerst komplexes –vielleicht chaotisches– System ist, kann eine

geringstfügige Änderung der Bedingungen (wie zum Beispiel durch den Flügelschlag eines Schmetterlings) das Endergebnis vollkommen verändern. Davon kommt die häufig zitierte Aussage, dass der Flügelschlag eines Schmetterlings in China einen Wirbelsturm in den USA auslösen könnte. Eine andere Theorie erklärt den Namen Schmetterlingseffekt allerdings mit der eigenartigen Form des Lorenzattraktors.

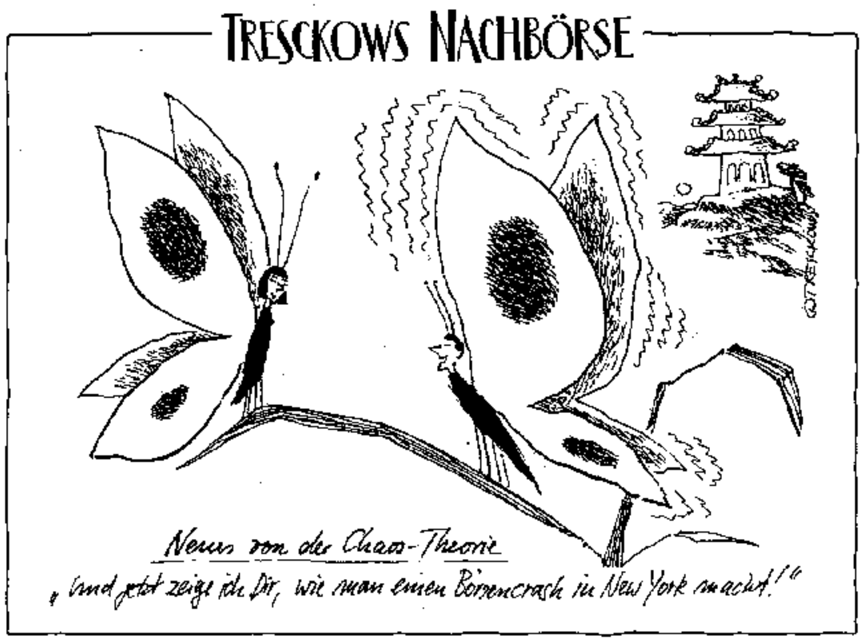
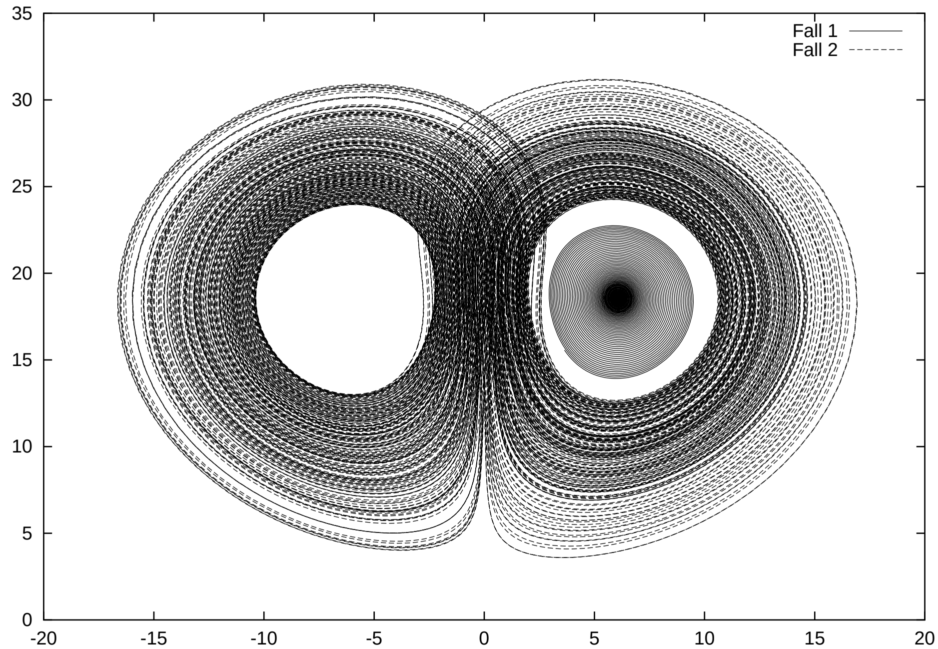


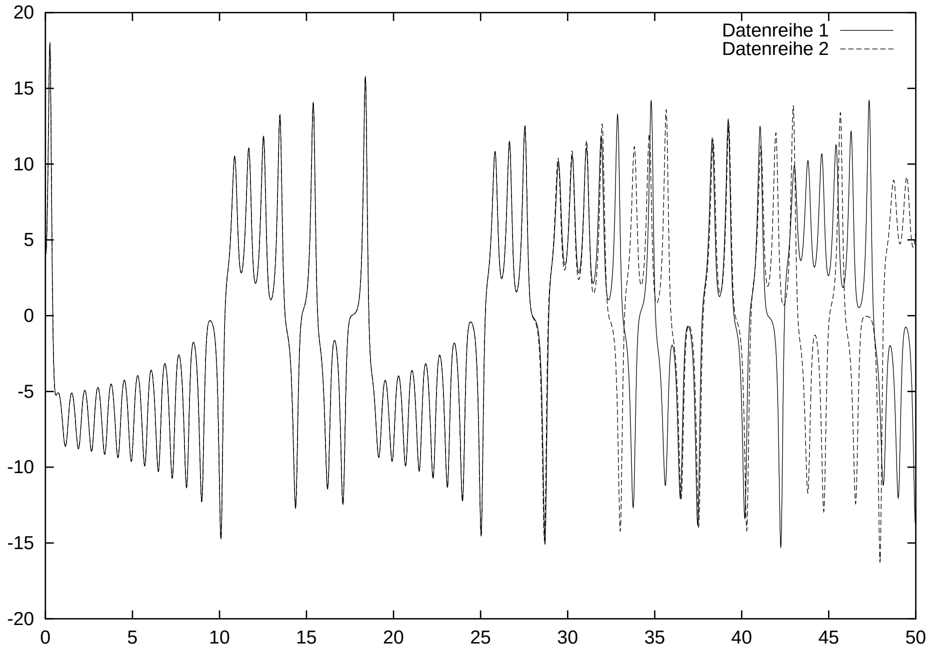
Abbildung 4.1: Neues von der Chaostheorie: FAZ, 14.1.2000

Ob das Wetter tatsächlich ein chaotisches System darstellt oder ob es sich *nur* um ein komplexes System handelt, dessen Parameter unzureichend bestimmt sind, ist unklar. In der Natur kann Chaos direkt nicht nachgewiesen werden. Es findet sich allein in den Gleichungen, die man zur Beschreibung des Systems herangezogen hat. Bei der Modellierung von Systemen liegt die Problematik in der Situation, dass die Parameter der gewählten Gleichungen, beim Lorenz–System z.B. r, zumeist nur mit einem Unsicherheitsfaktor bestimmt werden können. Im häufigsten Fall erhält man ein Intervall mit einem möglichen Minimal- und Maximalwert. Hier kann sich das Verhalten des Systems radikal ändern, je nachdem welchen Wert man nimmt. Am Beispiel des Lorenzsystem läßt sich das Problem gut verdeutlichen. Nehmen wir an, wir hätten r beim Wert von 24 mit einer Unsicherheit von 1 bestimmt. Damit sind wir uns ziemlich sicher, dass der Wert irgendwo im Intervall von 23 bis 25 liegen muss. Falls r kleiner als 24,74 sein sollte, mündet das System nach einiger Zeit in einem der beiden Gleichgewichtspunkte. Andernfalls haben wir chaotisches Verhalten. Verglichen mit Wetterbedingungen, wäre das gleichbedeutend mit dem Unterschied zwischen einem leichten Sturm und einem Orkan.

Die folgende Abbildung zeigt den unterschiedlichen Verlauf zweier Kurven, wobei sich r nur um 0,25 unterscheidet. Die Startwerte waren dabei identisch. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde erst bei $t = 90$ mit der Darstellung begonnen.



Ähnliches gilt häufig für die Startwerte, da auch hier Messungenauigkeiten auftreten können. Wie bereits erwähnt, kann schon der geringste Unterschied zu vollkommen anderen Ergebnissen führen. Die Entdeckung des Lorenzattraktors geschah, als Lorenz die Rechnungen zweimal durchführte, das eine Mal waren die Werte bis auf sechs Stellen angegeben, das andere Mal auf drei Stellen gerundet. Die Ergebnisse waren vollkommen unterschiedlich (siehe [15]). Damit bekommt man extreme Probleme mit der Interpretation der Ergebnisse.
Die Startwerte der Zeitreihen der folgenden Abbildung unterscheiden sich nur in der y–Koordinate um $0,00001$. Wie man sieht, beginnen sie nach einiger Zeit vollkommen anderes Verhalten zu zeigen.



Bei Differentialgleichungen wird Chaos schon bei strukturell sehr einfachen Gleichungen, wie dem Lorenz–System erreicht. Aber es gibt noch wesentlich einfachere Systeme, die bereits chaotisches Verhalten zeigen. Dafür müssen wir wieder den Bereich der Differentialgleichungen verlassen.

Chaos in der logistischen Wachstumsgleichung

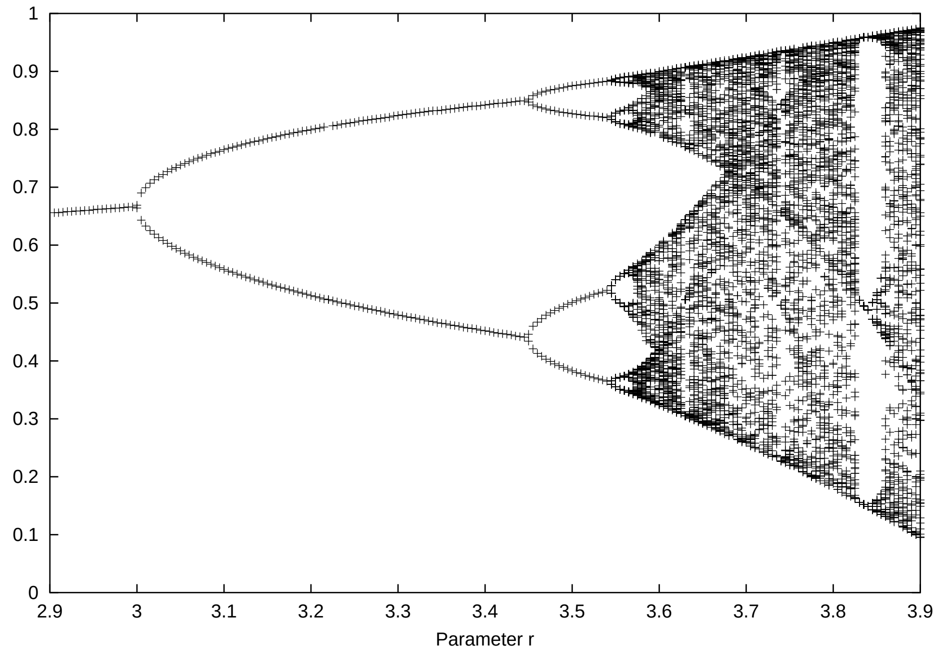
Während bei Differentialgleichungen, wie denen für den Lorenzattraktor, stets mehr als zwei simulierte Größen notwendig sind, um chaotisches Verhalten zu erzeugen, reicht bei Differenzengleichungen eine einzige aus. Die einfachste Differenzengleichung, die chaotisches Verhalten zeigen kann, ist die gutbekannte Gleichung für das logistische Wachstum: $X(t+1) = rX(t)(1-X(t))$. Wir haben gesehen, dass sie zwei Fixpunkte (d.h. Punkte mit $X(t+1) = X(t)$) aufweist: $X_1 = 0$ und $X_2 = 1$. Das ist aber noch nicht das Ende ihres Verhaltensspektrums. Der entscheidene Parameter ist hier r.

Aufgabe:
Die logistische Abbildung lässt sich leicht mithilfe eines kleinen Computerprogrammes nachstellen (oder siehe [5]).

- Was passiert, wenn r variiert wird ? Welches Verhalten lässt sich feststellen, wenn r größer wird als 3 ? Gibt es noch weitere Veränderungen ?

- Was passiert, wenn r größer ist als 3,57 ? Starten Sie mit zwei eng beieinander liegenden Werten. Ist noch ein regelmäßiges Verhalten im Diagramm zu erkennen ?

Bei 3,57 erreicht die logistische Abbildung schließlich ebenfalls chaotisches Verhalten. Trägt man die Gleichgewichtspunkte gegen den Parameter r auf, erhält man das wahrscheinlich bekannte Bifurkationsdiagramm, welches für diese Gleichung typisch ist. Eine Bifurkation ist der Punkt, an dem qualitative Änderungen im Verhalten auftreten, d.h. neue Gleichgewichtspunkte hinzukommen oder zum Beispiel ein bisheriger Fixpunkt von einem Grenzzyklus abgelöst wird (Hopf–Bifurkation). Hier wird ein Gleichgewichtspunkt abgelöst von zwei, die wiederum von vier usw. bis die Trennung quasi verschwimmt.



Aufgrund der dabei entstehenden Form, nennt man diesen Bifurkationstyp auch Heugabelbifurkation. Im Gegensatz zum Lorenz-System zeigen sich hier keine seltsamen Attraktoren. Beiden Systemen ist allerdings eine Besonderheit gemeinsam. Für bestimmte Werte von r existieren sogenannte Fenster im chaotischen Verhalten, wo wieder regelmäßiges Verhalten auftritt. Beim Lorenzsystem ist dies bei $r = 100,5$ der Fall, bei der logistischen sind die Fenster im Bifurkationsdiagramm gut zu erkennen. Das Lorenz–System stellt die einfachste chaotische Gleichung im kontinuierlichen Fall, die logistische im diskreten Fall dar. Es gibt noch eine Vielzahl gut untersuchter chaotischer Abbildungen, so die Rössler–Abbildung:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -(z+y) \\
\frac{dy}{dt} &= x + ay \\
\frac{dz}{dt} &= b + z(x-c)
\end{aligned}$$

Aufgabe:

- Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte in Abhängigkeit von a, b, c.
- Halten Sie a und b auf 0.2 fest und variieren Sie c. Was ergibt sich ?

Ein Programm hierfür findet sich z.B. bei Haftendorn (siehe [9]) bzw. fertige Java–Applets unter

- www.cs.tpu.ee/ ~jaagup/uk/dynsys/ds2/chaos/Simulation/Rossler/rosslersimulate.html
- kong.apmaths.uwo.ca/ ~bfraser/version1/rosslerintro.html
  (zeigt nur die xy–Ebene)

(**Achtung:** Das System muss sich eventuell erst einschwingen, anfänglich kann atypisches Verhalten auftreten, das aber nach kurzer Zeit verschwindet. Daher ist es besser, erst nach einiger Zeit ($t = 50$ bzw. 100) mit der Darstellung zu beginnen. Ein guter Startpunkt für (x, y, z) ist $(5, 0, 0)$).

Poincaré (ein berühmter Mathematiker und der eigentliche Entdecker chaotischen Verhaltens) soll über Attraktoren dieser Form gesagt haben (siehe [15]):

> „Man ist von der Komplexität dieser Figur so betroffen, dass ich nicht einmal versuche, sie zu zeichnen.“

Warnung:
Wenn man das logistische Wachstum im kontinuierlichen Fall mit der Euler–Methode diskretisiert, dann ist das Endergebnis die logistische Abbildung mit ihren Schwingungen und chaotischem Verhalten. Die eigentliche Ausgangsabbildung, die logistische Wachstumsgleichung, zeigt dies nicht!

Zusammenfassung Kapitel 4
Kapitel 4 behandelt den allgemeinen Fall von drei Akteuren. Hierbei wird auf die unterschiedlichen Möglichkeiten der gegenseitigen Beeinflussung der Spieler eingegangen.
Zum Schluß wird anhand eines konkreten Beispieles der Unterschied zwischen einer kontinuierlichen Beschreibung und einer zeit–diskreten Abbildung erläutert. Mithilfe des sogenannten Lorenzsystems wird hierbei in das Gebiet der chaotischen Systeme eingeführt, um auf die Problematik einer realistischen Modellierung aufmerksam zu machen. Damit soll beim Leser der kritische Umgang mit Modellen gefördert werden.

Literaturverzeichnis

[1] Behncke, H: Mathematik für Biologen I (Skript),
Universität Osnabrück 2000

[2] Bester, H: Lecture Notes Game Theory (Skript),
Freie Universität Berlin 2001

[3] Böhringer, Chr., C. Vogt (2001): Internationaler Klimaschutz - nicht mehr als symbolische Politik ?
ZEW Discussion Paper No. 01-06, Mannheim 2001

[4] Dixit A., B. Nalebuff: Spieltheorie Für Einsteiger,
Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart 1997

[5] Doerner, R: Chaos interaktiv,
http://www.robert-doerner.de/index.html

[6] Deutsches Klimarechenzentrum
Poster zum Tag der Forschung am 18.6.1998, Thema Klima und Wetter

[7] Engeln, H.: Weltklima: Vor der Katastrophe?
GEO MAGAZIN Nr.7/Juli 2001

[8] Environmental Protection Agency: Global Warming
http://www.epa.gov/glbalwarming/index.html

[9] Haftendorn, D.: Chaos und Fraktale,
http://rzserv2.fhnon.de/u1/gym03/homepage/faecher/mathe/chaos/dynsys/lorenz.htm

[10] Hartwig, J.: Optimale Kontrolle von Epidemien,
Diplomarbeit Universität Osnabrück, 1997

[11] Hamburger Bildungsserver: Klima und Energie
http://www.hamburger-bildungsserver.de/klima

[12] Iowa State University: Global Change Course,1994-2000
http://www.meteor.iastate.edu/gccourse/

[13] IPCC Third Assessment Report - Climate Change 2001
WG I Climate Change 2001: The Scientific Basis
Summary for Policymakers
http://www.ipcc.ch/

[14] Kohorst H., Ph. Portscheller:
Wozu Hefe nicht alles gut ist... Vom exponentiellen zum logistischen Wachstum
mathematik lehren, Heft 97/1999

[15] Lichtenegger, K. und E. Tusini: Get in Touch with Chaos,
http://www.uni-klu.ac.at/ ~gossimit/lv/usw00/w/g5/k3hgrund.html

[16] Malchow H.: Systemwissenschaft II: Theoretische Systemwissenschaft (Skript),
Universität Osnabrück 2002

[17] Matthies M., S.Dormann, S.Reimer, M.Klein, A.Bayer, S. Lauterbach:
Einführung in die Angewandte Systemwissenschaft (Skript),
Universität Osnabrück 2001

[18] Pickl, St.: Der τ–value als Kontrollparameter
Modellierung und Analyse eines Joint–Implementation Programmes mithilfe der dynamischen kooperativen Spieltheorie und der diskreten Optimierung
Shaker Verlag, Aachen 1998

[19] Schnädelbach, A.: Das iterierte Gefangendilemma,
http://www.informatik.uni-mainz.de/ ~astra/schueler/dilemma.html

[20] Thelen T.: Spieltheorie und das Gefangenendilemma,
Referat im Seminar Conflicts in AI 1997 an der Universität Osnabrück
http://www.cl-ki.uni-osnabrueck.de/ ~nntthele/ipd/index.html

[21] Umweltbundesamt, Fachgebiet Schutz der Erdatmosphäre
Die Klimaänderung - ein wissenschaftlicher Popanz ?
http://www.umweltbundesamt.de/uba-info-daten/daten/klimaaenderungen-weltweit.htm

[22] Bundesumweltministerium, Referat G II 1 (Globale Umweltkonventionen):
Klimakonferenz vom 29.10.-09.11.01 in Marrakesch: Die letzte Etappe vor dem in Kraft treten des Kyoto–Protokolls
Eine Einführung in die Konferenz, ihre Inhalte und die Verhandlungspositionen der Bundesregierung (mit Glossar zu den wichtigsten Themen)
http://www.bmu.de/download/dateien/klimakonferenz_sieben.pdf

[23] Wollny, M., St. Schmidt, T. Klemm
Kyoto und die Folgen... Arbeit im Seminar Umweltkonomie des IWW
1999, http://www.uni-karlsruhe.de/ ~uops/klima/klima_main.htm

[24] WWF, Hintergrundinformation
Das Kioto–Protokoll
2001, http://www.wwf.de/imperia/md/content/pdf/klima/cop7/kiotoprotokoll.pdf