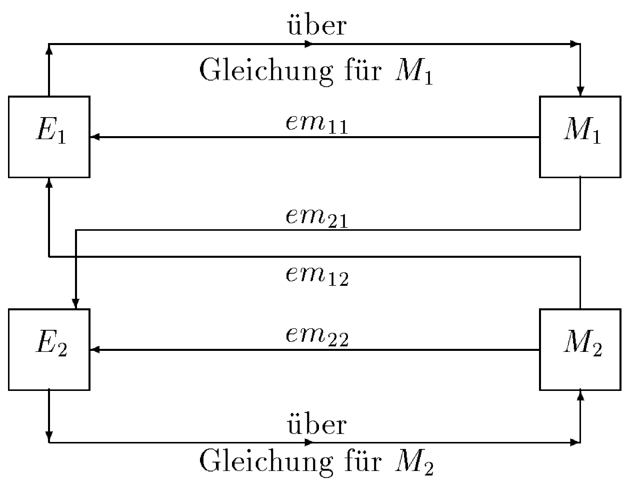
# Kapitel 3

# Simulationen mit zwei Akteuren

Im Folgendem sind zwei Akteure (Spieler 1 und 2), die sich gegenseitig beeinflussen, am Spiel beteiligt. Das Verhalten der Gleichungen hängt damit von beiden Spielern ab, die sich gegenseitig über die $em$–Parameter beeinflussen. Wir wollen im Weiteren untersuchen, was passiert, wenn sich die Beeinflussung ändert und betrachten daher wieder die Grundgleichungen des TEM–Modells.

## 3.1 Grundgleichungen

Da die zwei Akteure sich gegenseitig beeinflussen, sind die entsprechenden Parameter bei den Gleichungen für die Emissionsreduktionen ungleich Null. Die Emissionsreduktionen gehen in die Gleichung für die Mittelaufwendungen ein, was zu der Entstehung einer verdeckte Rückkoppelung führt. Indirekt beeinflusst damit ein Spieler durch die Änderung der Emissionen des anderen seine eigenen. Diese Rückkoppelung wird dadurch, dass nicht nur $E_i(t)$ sondern auch $E_i(t+1)$ eingehen, komplexer.
In der folgenden Abbildung wurde wegen der Übersichtlichkeit die Verbindung mit $E(t+1)$ außer acht gelassen. Gleiches gilt für die Rückkoppelungen von $E_i$ und $M_i$.

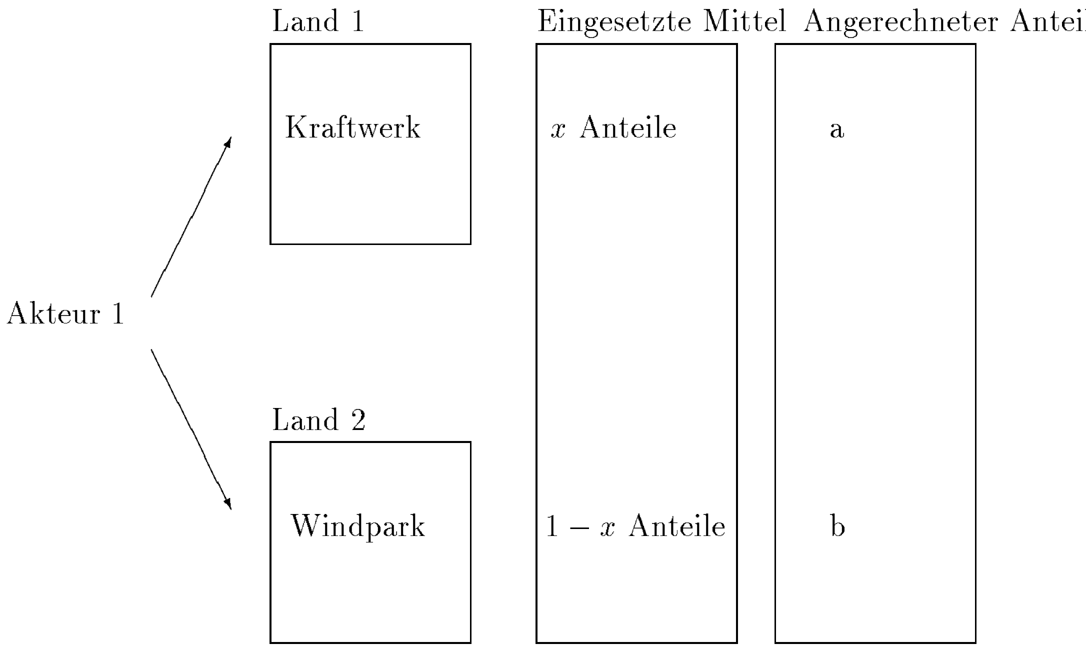


$$
\begin{aligned}
E_1(t+1) &= E_1(t) + em_{11}M_1(t) + em_{12}M_2(t)\\
M_1(t+1) &= M_1(t) - \lambda_1 M_1(t)(M_1^* - M_1(t))(E_1(t) + \phi_1(E_1(t+1) - E_1(t)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2(t+1) &= E_2(t) + em_{22}M_2(t) + em_{21}M_1(t)\\
M_2(t+1) &= M_2(t) - \lambda_2 M_2(t)(M_2^* - M_2(t))(E_2(t) + \phi_2(E_2(t+1) - E_2(t)))
\end{aligned}
$$

Die beiden Akteure können sich über die $em_{ij}$–Koppelungen gegenseitig beeinflussen. Die $em_{ij}$–Parameter geben die Auswirkungen auf die Emissionsreduktionen an und bestehen aus zwei (eigentlich drei) Anteilen:
Der Anteil an den vom Spieler $j$ eingesetzten finanziellen Mitteln, der Effektivität der Investition (Effektivität hier: Wieviel $CO_2$ wird mit einer Geldeinheit reduziert) und schließlich der Anteil, den sich der Spieler -je nach Absprache mit seinem Partner- anrechnen darf. Wenn mehr als ein Projekt zwischen den Partnern existiert, sind das gemittelte Werte.

**Beispiel: Spieler 1 und 2 kooperieren miteinander**
Akteur 1 errichtet im Land von 2 einen Windpark und im Land von 1 ein Wasserkraftwerk.
Der Parameter $em_{11}$ enthält damit die Auswirkungen aller von 1 eingesetzten Mittel auf die Emissionsreduktionen für 1. Dabei müssen die folgenden Überlegungen berücksichtigt werden.
Spieler 1 teilt seine Mittel auf $\Rightarrow$
$x$ Anteile (relativ gesehen) davon setzt er im eigenem Land (beim Wasserkraftwerk), $1 - x$ im Land von 2 ein.
Die Effektivität des Mitteleinsatzes beträgt beim Wasserkraftwerk (Land 1) $e_1$ und $e_2$ beim Windpark (Land 2). Damit ergibt eine Geldeinheit, die beim Projekt im Land 1 eingesetzt wird, $e_1$ Reduktionseinheiten.
Spieler 1 und 2 haben Verhandlungen geführt und sich darauf geeinigt, dass 1 sich im eigenen Land jeweils $a$ und im Land von 2 $b$ Anteile der erreichten Emissionsreduktionen anrechnen darf. Akteur 2 hingegen darf sich auf eigenem Gebiet $1 - b$ gutschreiben lassen. Damit ist $em_{11} = xe_1a + (1-x)e_2b$. Der Parameter $em_{21}$ gibt hingegen die Auswirkungen des Mitteleinsatzes von Spieler 1 auf die Emissionsreduktion von 2 an. Daher ist sein Wert: $em_{21} = (1-x)e_2(1-b)$.




Es fällt auf, dass die beiden Parameter offensichtlich voneinander abhängig sind. Eine Änderung von $em_{21}$ bewirkt daher auch immer eine qualitative Änderung der Bedeutung von $em_{11}$.

## 3.2 Von Kooperationen bis zu negativen Koppelungen

Falls mehr als ein Akteur am Spiel beteiligt ist, ergeben sich die folgenden Verhaltensmuster als Möglichkeiten, wenn man davon ausgeht, dass beide das Ziel der Emissionsreduktion verfolgen:

- Beide Akteure unterstützen sich in ihren Bemühungen
- Beide Akteure arbeiten nicht zusammen
- Akteur 1 hilft dem zweiten, aber dieser nicht Spieler 1. Und umgekehrt.

Aber welches Verhalten ist jetzt für den einzelnen Akteur das beste ? Die mathematische Disziplin, die sich mit solchen Konfliktsituationen befasst, ist die Spieltheorie.

### 3.2.1 Kooperation: Kleiner Exkurs in die Spieltheorie

> Strategisches Denken ist die Kunst, einen Gegner zu überlisten, der das gleiche mit Ihnen versucht. [...] Die Wissenschaft vom strategischen Denken heißt Spieltheorie ([4]).

Die Spieltheorie betrachtet eine Menge von Spielern, die sich in einer bestimmten Situation befinden. Im TEM–Modell ist dies die Situation von Kyoto: Alle Unterzeichner des Protokolls müssen ihre Reduktionsvorgaben erfüllen. Dabei müssen sie sich an gewisse Regeln halten. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass alle beteiligten Personen rational handeln und somit alle ihre Aktionen ihrem Ziel dienen. Sie werden also stets die Entscheidung treffen, die für sie den größtmöglichen Nutzen bietet. Das Problem hierbei ist, dass sie meist nicht wissen, was die anderen Beteiligten tun werden. Sie sind stets nur unvollständig über Pläne und Absichten des Gegners informiert. Jede Entscheidung, die von ihnen getroffen wird, ist damit mit einer Unsicherheit verbunden. Bei Spielen existieren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Arten:

- Kooperative Spiele: Die Spieler verfolgen ein gemeinsames Ziel, zu dessem Erreichen Absprachen getroffen werden. Hierbei sind die Spieler zu jeder Zeit vollständig über die Pläne und Absichten der anderen informiert.

- Nicht–kooperative Spiele: Es existiert weder eine Kommunikation zwischen den Spielern, noch existieren irgendwelche Absprachen. Jeder verfolgt sein eigenes Ziel.

Ein Beispiel für ein Zweipersonenspiel ist das sogenannte Gefangenendilemma (siehe z.B. [19], [20]):
Zwei Akteure $S_1$ und $S_2$ haben zusammen ein Verbrechen begangen, wurden gefasst und sitzen nun in Einzelhaft. Ihr Ziel ist es, ein möglichst geringes Strafmass zu bekommen. Der Richter macht nun jedem der Angeklagten ein Angebot. Wenn sie nicht gestehen, dann werden sie beide zu einem Jahr Gefängnis verurteilt. Gesteht jedoch ein Angeklagter, während der andere weiter schweigt, so tritt eine Art Kronzeugenregelung in Kraft. Der geständige Gefangene kommt frei, der andere wird zu zehn Jahren verurteilt. Sollten sich jedoch beide Angeklagte gegenseitig belasten, so können sie mit einer sechsjährigen Haftstrafe rechnen. Ihre Alternativen sehen damit folgendermaßen aus:

| | $S_2$ leugnet | $S_2$ gesteht |
|---|---|---|
| $S_1$ leugnet | beide 1 Jahr | $S_1$ 10 Jahre, $S_2$ 0 |
| $S_1$ gesteht | $S_1$ 0, $S_2$ 10 Jahre | beide sechs Jahre |

Die obige Tabelle lässt sich auch als Matrix schreiben:

| | $S_2$ leugnet | $S_2$ gesteht |
|---|---|---|
| $S_1$ leugnet | (1,1) | (10,0) |
| $S_1$ gesteht | (0,10) | (6,6) |

Die beiden Gefangenen geraten nun in eine Problemsituation. Wüsste $S_1$, dass $S_2$ gesteht, wäre seine beste Strategie auch zu gestehen. Wäre er sich auch sicher, dass

$S_2$ unter keinen Umständen gestehen würde, sollte er, von moralischen Überlegungen abgesehen, gestehen. Der Fall, dass ein Spieler leugnet, kann als Versuch einer Kooperation betrachtet werden. Für die Gemeinschaft ist dies der bestmöglichste Fall, beinhaltet aber, wenn keine Absprachen getroffen werden können, auch das höchste Risiko. Dieses Beispiel kann umdefiniert und für den Fall betrachtet werden, dass die Zahlen keine Strafe, sondern Auszahlungen bedeuten. In diesem Fall versucht der Spieler, für sich die höchste Zahl zu erreichen.

| | $S_2$ kooperiert (leugnet) | $S_2$ weicht ab (gesteht) |
|---|---|---|
| $S_1$ kooperiert (leugnet) | (3,3) | (0,5) |
| $S_1$ weicht ab (gesteht) | (5,0) | (1,1) |

Er sucht in diesem Fall die Strategie, die ihm –egal was der Gegner tut– immer den größtmöglichen Gewinn bringt. Diese Vorgehensweise heißt in der Spieltheorie *Auswahl der dominanten Strategien.* Jeder Spieler betrachtet seine Handlungsalternativen, hier bei Spieler 2 *gestehen* oder *leugnen* und vergleicht die möglichen Ausgänge miteinander in Berücksichtigung dessen, was der Gegner tun kann.
Bei einer Entscheidung für *gestehen*, bekommt er 5 ausgezahlt, wenn der Gegner leugnet und 1 sonst. Bei der anderen Wahl erhält er im ersten Fall 3 und im zweiten 0. Wir vergleichen also für $S_2$ jeweils die Werte einer Zeile miteinander und wählen die Spalte aus, bei der jeweils die höheren Werte vorkamen. Die Strategie *gestehen* ist also für beide Handlungsalternativen, die Akteur 1 vorbringen kann, die beste Lösung. Man sagt, auch die Strategie *gestehen* dominiere die Strategie *leugnen.* Eine Strategie, die von einer anderen dominiert wird, wird vom Spieler nicht berücksichtigt werden und kann daher gestrichen werden.
Analoges führt man für den Spieler 1 durch. Man vergleicht die Werte einer Spalte miteinander und wählt dann die Zeile, in denen jeweils der höhere Wert auftrat. Auch hier ist die beste Antwort auf jede mögliche Strategie des Spielers 2 zu leugnen.
Damit erreicht das Spiel ein Gleichgewicht bei der Strategieauswahl *gestehen, gestehen.* Gleichgewicht bedeutet in diesem Fall: Weicht ein Spieler von der Strategieauswahl ab, während alle anderen gleich bleiben, so wird er sich verschlechtern oder keine Veränderung erfahren, weswegen er nicht abweichen wird. Ein solches Gleichgewicht nennt man auch Nash–Gleichgewicht.

**Aufgabe:**
Spieler 1 hat die Strategien $x_1$, $x_2$ und Spieler 2 $y_1$, $y_2$ zur Auswahl.

- Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt von:

| | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | (1,2) | (5,1) |
| $x_2$ | (0,-200) | (4,-100) |

Gleichgewichte können durch das iterative Suchen und Streichen von dominierten Strategien gefunden werden.
**Beispiel:**
Spieler 1 spielt die Alternativen $T$, $B$, Spieler 2 $L$, $C$, $R$. Ihre Auszahlungen sehen folgendermaßen aus:

| | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | (4,3) | (2,7) | (1,4) |
| $B$ | (5,5) | (5,-1) | (-4,-2) |

Wir beginnen mit den Strategien von Spieler 2. Offenbar dominiert die Strategie $C$ die Strategie $R$ ($7 > 4$ und $-1 > -2$). Man kann letztere also streichen. Wir erhalten:

| | $L$ | $C$ |
|---|---|---|
| $T$ | (4,3) | (2,7) |
| $B$ | (5,5) | (5,-1) |

Jetzt betrachten wir die beiden Alternativen von Spieler 1. Wie man sieht ist $B$ die dominante Strategie: $5 > 4$ und $5 > 2$. Wir streichen $T$.

| | $L$ | $C$ |
|---|---|---|
| $B$ | (5,5) | (5,-1) |

Spieler 2 wird jetzt Strategie $L$ spielen, womit das Gleichgewicht erreicht ist.

**Aufgabe:**
Spieler 1 hat die Strategien $T$, $M$ und $B$ zur Auswahl. Spieler 2 $L$, $C$ und $R$. Ihre Auszahlungen lauten:

| | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | (2,0) | (1,1) | (4,2) |
| $M$ | (3,4) | (1,2) | (2,3) |
| $B$ | (1,3) | (0,2) | (3,0) |

- Entfernen Sie nacheinander die dominierten Strategien. Welche bleiben übrig?

(Aufgaben und Beispiele aus [2])

Im Fall des Kyoto–Prozesses kann man ein ähnliches Problem wie das des Gefangendilemmas einführen, das sogenannte *Umweltdilemma* (siehe [18], S.19).
In diesem Dilemma befinden sich zwei Staaten, die zwar –im Großen und Ganzem gesehen– durchaus an einer Reduktion der Treibhausgase interessiert sind, dabei aber folgende Präferenzordung zeigen (vergl [18], S. 19):

- Am geeigneten wäre es, wenn sich alle Staaten außer mir an den Aktivitäten zur Reduktionsminderung beteiligen würden

- Am zweitgünstigsten wäre es, wenn sich alle Staaten daran beteiligen würden
- Die dritte Präferenz wäre, dass keinerlei Aktivitäten verwirklicht werden
- Am ungünstigsten wäre es, wenn lediglich ich mich an den Maßnahmen beteiligen würde

**Aufgabe:**

- Versuchen Sie die einzelnen Präferenzen mithilfe der folgenden Tabelle im Gefangendilemma zu identifizieren. Welcher Punkt entspricht dabei welchem Eintrag ?

| | $S_2$ kooperiert | $S_2$ weicht ab |
|---|---|---|
| $S_1$ kooperiert | (3,3) | (0,5) |
| $S_1$ weicht ab | (5,0) | (1,1) |

Die obige Präferenzordnung kann folgendermaßen erklärt werden:
Alle Staaten sind prinzipiell daran interessiert, die Klimaerwärmung zu stoppen. Wenn aber nur ein einziger Staat versucht, seine Treibhausgase isoliert zu reduzieren, dann erreicht er defacto damit kaum eine Wirkung, weil er einen kleinen Anteil ein wenig reduziert, was das Weltklima nicht nennenswert beeinflussen wird. Das einzige, was ihm bevorsteht, sind zusätzliche Kosten. Daher werden Staaten vor dieser Option zurückschrecken, und vor die Wahl gestellt, Treibhausgase alleine zu reduzieren oder gar nicht, die letztere Alternative wählen. Man braucht damit eine Kooperation möglichst vieler Staaten, um etwas zu erreichen. Das Problem hierbei ist, dass es für den einzelnen Staat prinzipiell vorteilhaft ist, sich nicht daran zu beteiligen. Wenn bereits ausreichend viele Staaten ihren Ausstoß an Treibhausgasen senken, verlangsamt sich die Klimaerwärmung ohne das Zutun des Staates, der sich dabei auch Kosten erspart. Damit erreicht er prinzipiell sein Ziel, ohne etwas dafür tun zu müssen. Der Anreiz nicht zu kooperieren ist damit sehr hoch (vergl. [3]).

Man kann als weitere Variation des Gefangenendilemmas auch den Fall betrachten, dass $S_1$ und $S_2$ zwei Handelspartner sind. $S_1$ verkauft $S_2$ eine Ware. Bezahlt $S_2$ sie prompt, liegt eine Kooperation vor. Bezahlt er sie erst sehr spät, weil er das Geld anderweitig gewinnbringend anlegen möchte, verhält er sich unkooperativ. In dem Fall entsteht $S_1$ ein Schaden.
Auch ein beliebtes Beispiel sind zwei Schwarzmarkthändler, die miteinander Waren tauschen. Die Waren werden an den vorher mitgeteilten Orten versteckt. Keiner der beiden Händler weiß, ob der andere wirklich die Ware hinterlegt. Im Einzelfall ist immer die beste Strategie, sich unkooperativ zu verhalten, da man leider nicht weiß, was der andere tun wird. In diesem Fall behält man zumindest die eigene Ware, anstatt am Ende ohne alles dazustehen. Damit allerdings erreichen beide Spieler nicht den optimalen Wert.
Aber was passiert, wenn das Spiel wiederholt wird, die beiden Schwarzmarkthändler

sozusagen eine dauerhafte Handelsbeziehung eingehen ? Ist dann ein solches Verhalten immer noch die beste Lösung auf Dauer ?
Bei einer vorgegebenen Auszahlungsmatrix ist das Spiel leicht zu simulieren, womit man unterschiedliche Strategien überprüfen kann. Es gibt hierzu eine Vielzahl von fertigen Programmen im Internet.
So zum Beispiel bei A. Schnädelbach: *Das iterierte Gefangenendilemma*, unter

- http://www.informatik.uni-mainz.de/ ~astra/schueler/dilemma.html.

Hier können Strategien gegen andere getestet und überprüft werden, welche im Mittel die besten Aussichten hat.
Ebenso bei *Spieltheorie und das Gefangenendilemma* von Tobias Thelen,

- http://www.cl-ki.uni-osnabrueck.de/ ~nntthele/ipd/index.html.

Die benutzte Programmiersprache ist hier allerdings LISP.

**Kooperation oder nicht ?**

**Aufgabe:**
Am Spiel bei TEMPI sind jetzt zwei Spieler beteiligt, die ihre Strategien verfolgen. Beide starten mit der Verpflichtung zur Reduktion von fünf Emissionseinheiten und mit anfänglichen Mittelaufwendungen von 0,1. Nehmen wir an, jeder Spieler will nur für sich sein Ziel erreichen, ist am Gesamtziel nicht interessiert und auch nicht, wie schnell es erreicht wird.

- Ist dann eine Kooperation immer der günstigste Fall oder lässt sich der andere Akteur quasi ausnutzen ?
- Was aber kann passieren, wenn der Gegner sich genauso verhält ?
- Ist die Parameterwahl aus Kapitel 1 noch immer geeignet ?

### 3.2.2 Mathematischer Exkurs: Gleichgewichte

Es ist schon aufgefallen, dass die Simulationen häufig in festen Punkten münden, aus denen die Emissionsreduktionen und Mittelaufwendungen nicht mehr hinausgehen. Das System hat hier ein sogenanntes Gleichgewicht erreicht.
Gleichgewichte oder genauer Fließgleichgewichte, bei Differenzengleichungen auch Fixpunkte genannt, liegen vor, wenn keine sichtbaren Änderungen der Zustandsgrößen zu erkennen sind. Bei Differenzengleichungen gilt dann $X(t+1) = X(t)$ und bei Differentialgleichungen $\frac{d}{dt}X(t) = 0$, d.h. es treten keine Veränderungen mehr auf. Betrachtet man eine Population mit den Änderungen *Sterben* und *Geborenwerden*, handelt es sich um ein Gleichgewicht, wenn sich die beiden Vorgänge ausgleichen, also genausoviele Tiere geboren werden wie sterben. Die Gesamtzahl bleibt damit gleich, obwohl die Änderungen nachwievor stattfinden. Bei der Differentialgleichung $\frac{d}{dt}B(t) = mB(t) - dB(t)$ aus Kapitel 1, die die Veränderung der Hefezellenkultur beschrieb, gilt damit:

$\frac{d}{dt}B(t) = 0$ oder $mB(t) - dB(t)$, also wie gesagt eine zahlenmäßige Übereinstimmung von Sterbevorgang und Geborenwerden.
Ein anderes aber ähnliches Beispiel für ein solches dynamisches Gleichgewicht ist ein Wassertank mit einem Zufluss und Abfluss. Es fließt immer eine bestimmte Menge an Flüssigkeit nach, was hier mit $I(t)$ bezeichnet werden soll. Gleichzeitig fließt immer Flüssigkeit ab und das proportional zur vorhandenen Menge $M(t)$.

Zufluss $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Wassertank}}$ $\Rightarrow$ Abfluss

Zufluss $I(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{M(t)}$ $\Rightarrow$ Abfluss $cM(t)$

Auch hier liegt ein Gleichgewicht vor, wenn sich Zu– und Abfluss ausgleichen, d.h., wenn gilt $I(t) = cM(t)$. Obwohl nachwievor Wasser zu– und abströmt, bleibt die Wassermenge im Tank konstant.
Das Interesse an Gleichgewichten rührt daher, dass man mit ihrer Hilfe Aussagen über das Verhalten einer Gleichung machen kann, die sich nicht geschlossen lösen lässt. Man modelliert eine Größe im Allgemeinen, weil man wissen will, was mit ihr passiert, also ob sie gegen Unendlich geht oder einen festen Wert annimmt. Kann man die Gleichung, die im Modell verwendet wurde, lösen, dann ist man fertig. Schließlich kennt man jetzt das gesamte System. Ansonsten kann man den Weg über die Gleichgewichtspunkte nehmen. Die Forderung für einen Gleichgewichtspunkt ist -wie bereits erwähnt-, dass keine sichtbaren Änderungen vorliegen. Wir wollen jetzt die Bedingungen für das Vorkommen eines Gleichgewichtspunktes mathematisch formulieren.
**Allgemein bei Differenzengleichungen:**

$$X(t+1) = f(X(t))$$

Es liegt ein Gleichgewicht vor, wenn:

$$X(t+1) = X(t) \Rightarrow f(X(t)) = X(t)$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} E_1(t+1) &= E_1(t) + em_{11}M_1(t) \\ M_1(t+1) &= M_1(t) - \lambda_1 M_1(t)(M_1^* - M_1(t))(E_1(t) + \phi_1(E_1(t+1) - E_1(t))) \end{aligned}$$

Wir suchen jetzt die Gleichgewichtspunkte $E^S$ und $M^S$, für die gilt
$E_1^S(t+1) = E_1^S(t)$ und $M_1^S(t+1) = M^S S_1(t)$.
Aus $E_1(t+1) = E_1(t)$ folgt: $em_{11}M_1(t) = 0$. Da $em_{11} \neq 0$ gilt $\Rightarrow M^S(t) = 0$. Wenn wir gemeinsame Gleichgewichte für $E(t)$ und $M(t)$ betrachten, müssen beide Gleichungen gleichzeitig ein solches annehmen. Die erste kann nur einen einzigen solchen Punkt besitzen. Diesen setzen wir in die zweite Gleichung ein, um zu überprüfen, unter welchen Voraussetzungen er auch dort die Bedingung erfüllt. Wie man sehr

leicht sieht, ist das immer der Fall. Das Problem hier ist, dass der Wert für $E$ beliebig ist. Der Wert von $E$, den das System gerade hatte, als die Mittelaufwendungen auf 0 fielen, ist der Gleichgewichtswert. Der ist leider nicht so berechenbar.
**Übung:**
Logistische Wachstumsgleichung:

$$X(t+1) = rX(t)(K - X(t))$$

- Setzen Sie $X(t+1) = X(t)$ und berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte

Wie man sieht, haben wir bis jetzt nur die Existenz von Gleichgewichtspunkten gezeigt. Wenn es sie gibt, und das System in ihnen ist, dann bleibt es auch da, weil keine Änderungen mehr auftreten. Es bleibt die Frage offen, ob das System überhaupt in einen Gleichgewichtspunkt hineinläuft. Und was passiert, wenn es in ihm ist und leicht gestört wird ? Bei einer Population z.B. wenn neue Tiere einwandern. Kehrt es in den Gleichgewichtspunkt zurück oder nimmt es vollkommen neue Werte an ?
Die Frage, die also noch zu klären ist, ist die Stabilität der Gleichgewichtspunkte. Eine globale Stabilität liegt vor, wenn das System bei beliebigen Startbedingungen im Gleichgewichtspunkt endet. Diese Eigenschaft ist meist recht schwer zu zeigen. Eine lokale Stabilität liegt vor, wenn das System nach einer leichten Störung wieder zurückkehrt.
Die lokale Stabilität ist im Allgemeinen leichter zu überprüfen. Man wählt zumeist den Weg über einen Störungsterm. Das System $X(t)$ sei also im Gleichgewichtspunkt $X^S$, d.h. es gelte $X(t) = X^S = f(X^S)$. Dort wird es ausgelenkt: $X(t) = X^S + Z(t)$, wobei $Z(t)$ dann als Störungsterm bezeichnet wird. Gilt jetzt, dass die Störung $Z(t)$ wieder gegen Null geht, wenn die Zeit vergeht, dann ist der Gleichgewichtspunkt $X^S$ stabil.

| |
|---|
| System $X(t+1) = f(X(t))$ im Gleichgewicht, also $X(t) = X^S = f(X^S)$ |
| $\downarrow$ |
| Störung Z(t) auf das Gleichgewicht $\Rightarrow$ Auslenkung um $Z(t)$ |
| $\downarrow$ |
| System jetzt bei $X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X(t)) = f(X^S + Z(t))$ |
| $\downarrow$ |
| Was passiert ? |

Wir betrachten also:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X(t)) = f(X^S + Z(t))$$

Ein Problem ist hier die Funktion $f$, die beliebig kompliziert werden kann. Zudem konnten wir die Gleichung schon mit $X(t)$ nicht lösen. Sonst würden wir auch nicht mit den Gleichgewichtspunkten arbeiten. Wir müssen also einen Weg finden, $f$ auf eine unkompliziertere Methode abzuschätzen. Dazu verwendet man die sogenannte Taylorreihe. Aus dem Unterricht ist vielleicht bereits bekannt, das man bei numerischen Integrationen die Funktion mithilfe der Ableitungen, d.h. Steigungen, approximiert. Etwas Ähnliches macht die Taylorreihe:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t) + \frac{d^2}{dX^2(t)} f(X^S) Z^2(t) + ...$$

Sie approximiert damit $f(X^S + Z(t))$ mit Hilfe der Ableitungen von $f$ nach $X(t)$. Man vernachlässigt jetzt alle Glieder höherer Ordnung und betrachtet eine Näherung mithilfe der ersten Ableitung:

$$X(t+1) = X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t)$$

Man behauptet damit, dass sich $f(X^S + Z(t))$ in der Nähe von $X^S$ durch die Steigung multipliziert mit dem Betrag der Auslenkung approximieren ließe. Man zieht also gewissermaßen eine Gerade mit der Steigung $f'(X^S) = \frac{d}{dX(t)} f(X^S)$ durch den Gleichgewichtspunkt. Das ist nur dann durchführbar, wenn man die Glieder höherer Ordnung (die quadratischen, kubischen usw. Terme) der Taylorapproximation vernachlässigen kann. Je größer $Z(t)$ wird, desto höher ist aber das Gewicht, das diese Ausdrücke bekommen. Aus diesem Grund kann mithilfe der Taylorreihe nur die lokale Stabilität überprüft werden.

$$X^S + Z(t+1) = f(X^S) + \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t)$$

Da $X^S$ ein Gleichgewichtspunkt ist, gilt $X^S = f(X^S)$. Damit haben wir:

$$Z(t+1) = \frac{d}{dX(t)} f(X^S) Z(t) = \lambda Z(t)$$

Das ist die exponentielle Wachstumsgleichung mit der Lösung: $Z(t) = Z_0 \lambda^t$. Wir wissen, dass $Z(t)$ für $|\lambda| > 1$ wächst. Für $\lambda = 1$ bleibt es auf dem Anfangswert $Z_0$ stehen. Damit verschwindet die Störung nur, wenn $|\lambda| < 1$ gilt. In dem Fall ist der Gleichgewichtspunkt stabil. Wir haben hier nur den eindimensionalen Fall betrachtet. Wenn mehr als eine Zustandsgröße vorliegt, dann kann Analoges durchgeführt werden.

Vorgehensweise:
Bestimmung der Fixpunkte und ihrer Stabilität bei Differenzengleichungen

- Ausgangsgleichung:
$$X(t+1) = f(X(t))$$
- Berechne Fixpunkt $X^S$ mit $X^S = f(X^S)$
- Bestimme Ableitung $\frac{d}{dX(t)} f(X(t))$
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| < 1$, dann ist der Fixpunkt stabil
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| > 1$, dann ist der Fixpunkt instabil
- Gilt $|\frac{d}{dX(t)} f(X^S)| = 1$, dann ist so keine Aussage möglich

**Übung:**

- Welcher der beiden oben berechneten Gleichgewichtspunkte der logistischen Abbildung ist stabil ?

Auch bei Systemen mit mehr als einer Größe können diese Untersuchungen durchgeführt werden und verlaufen analog. Es wird allerdings darauf verzichtet, da sich herausstellt, dass beim TEM-Modell aufgrund der verwendeten Struktur die Frage der Stabilität nicht auf diese Weise geklärt werden kann.

### Ein anderes Verhaltensmuster: Schwingungen

**Aufgabe:**
Machen Sie folgenden Versuch:

- Setzen Sie die Parameter im TEM–Modell für die wechselseitigen Beeinflussungen auf -1 und starten Sie das System mit ungleichen Startwerten für die Mittelaufwendungen ($\lambda$ sollte dabei für alle Akteure gleich und $\phi$ Null sein). Was passiert und warum tritt dieses Verhalten auf ?
- Gibt es eine Möglichkeit die Schwingungen auslaufen zu lassen ? (Tipp: Man variiere die Parameter (außer den $em_{ij}$ natürlich))
- Gibt es regelmäßige Schwingungen, d.h. solche, deren Amplitude sich nicht mehr ändert ?

### Schwingungen beim einfachen Räuber-Beute-System

Wir betrachten je eine Population von Schneehasen und Luchsen. Die Luchse ernähren sich ausschließlich von den Schneehasen. Wir nehmen folgende Punkte an:

- Die Nahrungsvorräte der Schneehasen sind unbegrenzt.

- Wenn die Schneehasen nicht von den Luchsen gefressen werden würden, würden sie daher mit der Rate b wachsen. Das Wachstum sei proportional zur Dichte (oder Anzahl) der Hasen. Somit gilt für das System:
  **Schneehasen ohne Luchse**:

$$\frac{d}{dt}H(t) = bH(t)$$

- Die Luchse ernähren sich ausschließlich von den Schneehasen.
- Gibt es keine Schneehasen, dann sterben die Luchse mit der Zeit aus. Die Sterberate ist der Dichte der Luchse proportional.

$$\frac{d}{dt}F(t) = -mF(t)$$

- Trifft ein Luchs einen Schneehasen, dann wird letzterer gefressen. Die Wahrscheinlichkeit für ein solches Treffen ist proportional zu dem Produkt der Dichten der Luchs– und Schneehasenpopulation $F(t)H(t)$. Das heißt prinzipiell nichts anderes, als das die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen steigt, je mehr Tiere es gibt. Das Wachstum der Luchspopulation ist ebenfalls abhängig von der Häufigkeit des Zusammentreffens, gleiches gilt für das Abnehmen der Hasenpopulation. Der Proportionalitätsfaktor wird im Weiteren mit $r$ bezeichnet.

Die Gleichungen haben damit die folgende Form:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &= -mF(t) + rF(t)H(t) \\ \frac{d}{dt}H(t) &= bH(t) - rF(t)H(t)\end{aligned}$$

Das Modell stammt von Lotka (1910; 1925) und wurde benutzt, um den Zusammenhang von Hasen und Luchsen in einem Gebiet in Kanada zu beschreiben. (Eine Pelzkompanie war sehr interessiert an diesem Thema und lieferte Daten.) Diese Gleichungen sind nicht explizit lösbar.

**Aufgabe:**

- Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte für beide Gleichungen in Abhängigkeit der Parameter $m$, $b$ und $r$. Bei Differentialgleichungen gilt wie bei Differenzengleichungen, dass im Gleichgewichtszustand keine Veränderungen mehr stattfinden. Es muss also gelten: $\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}H(t) = 0$.
  Fangen Sie dabei bei einer Gleichung z.B. $\frac{d}{dt}F(t) = 0$ an, berechnen Sie dort die Nullstellen und setzen Sie diese in $\frac{d}{dt}H(t) = 0$ ein.
- Simulieren Sie das System mit einem geeigneten Tool (z.B. Dynasys).

- Geben Sie Werte für die Parameter $m$, $b$ und $r$ vor.
- Starten Sie in der Nähe des zweiten Gleichgewichtspunktes, aber nicht in ihm. Was passiert ?
- Lassen Sie den Startwert für die Hasen auf dem altem Wert stehen und variieren Sie den für die Luchspopulation. Wie verhalten sich dabei die Kurven ?

**Zusammenfassung Kapitel 3**

Im Kapitel 3 wird das Modell auf zwei Akteure erweitert und die dabei entstehenden neuen Situationen analytisch untersucht. Da sich Joint Implementation durch ein kooperatives Vorgehen auszeichnet und das TEM–Modell in der Lage ist, diesen Mechanismus abzubilden, wird ein allgemeiner Einblick in die Spieltheorie gegeben. Hierbei wird das sogenannte Umweltdilemma vorgestellt, das als Sonderfall des Gefangendilemmas angesehen werden kann. Bei der allgemeinen Beschreibung von Differenzengleichungen wird die Bedeutung von Gleichgewichtspunkten erläutert, die als Zielpunkte des Kyoto–Protokolls aufgefasst werden können.