TEMPI
Der Kyoto–Prozess und Dynamische Systeme
Arbeitsmappe zu einem interaktiven Entscheidungsunterstützungssystem

Stefan Pickl
Silja Meyer–Nieberg

22. Juli 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Klimaänderung, hervorgerufen durch den Anstieg der Treibhausgase in der Atmosphäre, ist eines der brisantesten Themen unsere Zeit. Klimamodelle weisen auf wahrscheinlich desaströse Folgen einer weiteren Erwärmung hin, und schon jetzt häuft sich die Zahl von Umweltkatastrophen und verschiebt sich der Frühlingsbeginn in Nordeuropa nach vorne.
In der internationalen Klimapolitik wird seit Jahren versucht, sich auf Vorgaben zu einigen, um einen weiteren schnellen Anstieg der Konzentration der Treibhausgase zu verhindern. Der erste Schritt auf diesem Weg war der Beschluss der Klimarahmenkonvention auf dem Weltgipfel für Umwelt und Ernährung 1992 in Rio de Janeiro. Auf einer der Folgekonferenzen 1997 wurde das sogenannte Kyoto–Protokoll verabschiedet. Dieses sieht eine Reduktion der Treibhausgase auf 95% der Menge von 1990 vor und vereinbart verschiedene Hilfsmittel zum Erreichen der Ziele. Über die genaue Umsetzung entbrannte allerdings ein heftiger Streit, der die Einführung lange behinderte. Zu Beginn des Jahres 2002 scheinen die Hindernisse, die einer Ratifizierung des Kyoto–Protokolls im Wege standen, beseitigt, und der Weg zu einem Inkraftreten zum Nachhaltigkeitsgipfel in Johannesburg im September 2002 frei zu sein.
Der Simulation und der Modellierung von Klimaschutzaktivitäten mithilfe zeitdiskreter dynamischer Systeme und spieltheoretischen Methoden kommt daher große Bedeutung zu. Bislang gibt es jedoch kaum dynamische Modelle, die den Kyoto-Prozess realistisch beschreiben.
Mit dem Projekt TEMPI (Technologie Emissionen Mittel Prozess-Identifikation) soll eine virtuelle Lernstätte entwickelt werden, die diesen Aspekt aufbauend auf dem zugrundeliegenden TEM-Modell (Technologie Emissionen Mittel Modell) aufgreift. Die Entwicklung des TEM-Modells wurde 2000 mit dem Dissertationspreis der Gesellschaft für Operations Research GOR gefördert.
Das TEM-Modell eignet sich besonders für den Einsatz in der Schule, da es aufgrund seiner transparenten Struktur Einblicke in die zugrundeliegenden Prozesse erlaubt, gleichzeitig aber ein großes Verhaltensspektrum darstellen kann. Weiterhin berücksichtigt es als eines der wenigen Modelle die Wechselwirkungen zwischen getätigten Investitionen und Emissionsreduktionen.
Die Grundlagen des TEM–Modelles und seiner Anwendung bilden spieltheoretische Überlegungen, Wachstumsprozesse und generell nicht lineare Dynamiken; Themen, die allgemein nicht zum Lehrplan der Schulen gehören, aber durchaus in der Oberstufe behandelt werden können.
In der vorliegenden Arbeitsmappe soll in die oben erwähnten Thematik eingeführt

werden. Das Kapitel 1 versucht einen Überblick über die Grunddynamik des TEM–Modells zu geben und führt in die Modellbildung anhand von Wachstumsprozessen ein. Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den Grundlagen des Kyoto–Prozesses und der Klimaänderung. Im Kapitel 3 werden schließlich spieltheoretische Fragestellungen und dynamische Gleichgewichte betrachtet. Dabei wird auch auf weitere Verhaltensmuster mathematischer Gleichungen eingegangen. Das letzte Kapitel befasst sich mit der gesamten Struktur des TEM-Modells und führt in den Bereich der nichtlinearen Dynamik und des Chaos ein. Bei der Arbeit mit der Mappe ist vorgesehen, dass das erste Kapitel vollständig durchgearbeitet werden soll, um einen grundlegenden Überblick über die einzelnen Gleichungen zu erhalten, während je nach Interessenlage Gruppen gebildet und aus den anderen Kapiteln Bereiche herausgegriffen werden können. Diese Modularisierung entspricht auch dem didaktischem Konzept, das der virtuellen Lernstätte TEMPI zugrundeliegt.

Kapitel 1

Simulationen mit einem Akteur: Wirkungsweise der Parameter

Dieses und die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit Fragen der Klimaproblematik, d.h. mit Fragen wie: Welche Auswirkungen kann die Klimaerwärmung haben ? Welche Inhalte hatte das Abkommen von Kyoto ? Wie kann man versuchen, die Wirksamkeit der einzelnen dort vereinbarten Mechanismen und Vorhaben abzuschätzen ? Wir werden uns im Folgenden mit dem TEM-Modell befassen, das einen der zentralen Punkte des Kyoto-Protokolls, den sogenannten Joint Implementation–Prozess, aufgreift. In diesem Kapitel soll das Modell kurz vorgestellt und das Verhalten der Grundgleichungen des TEM–Modells untersucht werden. Hierbei wollen wir die Frage klären, wie sich grundsätzlich die Mittelaufwendungen und Emissionsreduktionen verhalten, wenn nur ein einziger Spieler vorhanden ist. Damit soll der Einfluss der Parameter λ, ϕ und M^* verdeutlicht werden und somit die Effekte, die bei einer Veränderung zu beobachten sind. Es ist nicht das Ziel dieses Abschnittes, umfassend in das TEM–Modell einzuführen, sondern ein Gefühl für die Gleichungen zu vermitteln.

1.1 Ausgangsgleichungen des TEM-Modells

Das TEM–Modell versucht den Joint Implementation–Prozess im Rahmen des Kyoto-Protokolls (siehe 2) zu beschreiben. Im Kyoto-Protokoll von 1997 wurde vereinbart, die Emissionen der Treibhausgase auf 95% des Niveaus von 1990 zu reduzieren. Um die Emissionsreduktionen für die einzelnen Staaten zu erleichtern, wurden sogenannte flexible Mechanismen eingeführt, darunter auch Joint Implementation. Joint Implementation bedeutet, dass Staaten nicht verpflichtet sind, die Reduktionen unbedingt auf eigenem Gebiet zu erreichen. Sie können auch in anderen Ländern Projekte durchführen und sich die dabei erzielten Emissionsreduktionen zum Teil anrechnen lassen. Den restlichen Teil erhält je nach Vereinbarung der Staat, auf dessen Gebiet die Reduktion erreicht wurde. Das führt dazu, dass im Modell die folgende Grundannahme getroffen wird:

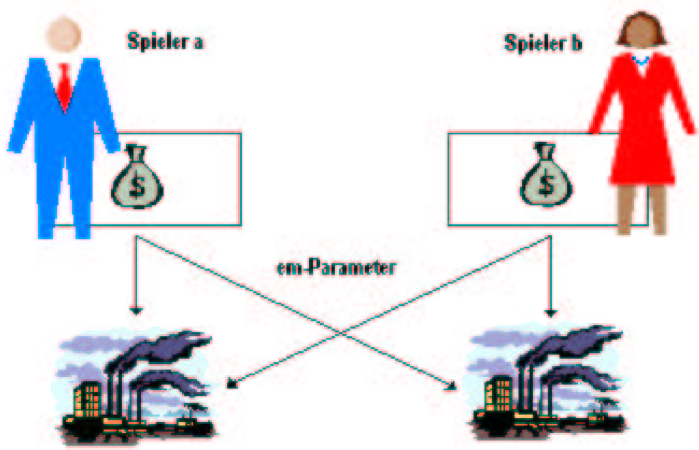
Spieler a kann Emissionsreduktion von Spieler b verändern.

Das TEM–Modell betrachtet insgesamt drei Spieler (Länder), die versuchen, ihre Kyoto–Vorgaben zu erfüllen, gleichzeitig aber so wenig finanzielle Mittel wie möglich einzusetzen. Für jeden Spieler werden zwei Größen beschrieben: die eingesetzten Mittel (**M**) und die erzielte Emissionsreduktion (**E**) zur Zeit t. Das Modell versucht die Veränderung dieser beiden Werte wiederzugeben, also wie sich sich die Emissionsreduktionen und Mittelaufwendungen von einem Zeitschritt zum nächsten verändern.

$$E_i(t+1) = E_i(t) + f(E_i(t), M_i(t))$$

$$M_i(t+1) = M_i(t) + g(E_i(t), M_i(t))$$

Jeder dieser Spieler kann –wie bereits erwähnt– seine Mittel im eigenen Land (Auswirkung auf seine eigene Emissionsreduktion) oder in den Ländern der anderen Mitspieler einsetzen. Dies hat entweder eine Verstärkung der Reduktion (positive Kopplung) oder eine Verringerung (negative Kopplung) zur Folge, wenn er z.B. im anderen Land in den Bau von Kohlekraftwerken investiert.



Die Auswirkung von Mittelinvestition auf Emissionsreduktion werden durch die em_{ij}-**Parameter** beschrieben.
Ist z.B. $em_{12} > 0$, so hat die Mittelaufwendung M_2 des zweiten Akteurs einen positiven Einfluss auf die Emissionsreduktion E_1 bei Akteur 1. Ist $em_{12} < 0$, so führen die Mittel, die der Spieler 2 einsetzt, zu einer Verringerung der Reduktionen bei 1. Die mathematische Formulierung hierfür lautet:

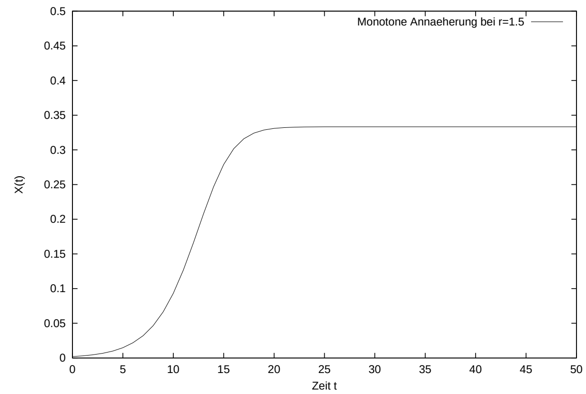
Emissionsreduktion des i-ten Akteurs:

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{3} em_{ij} M_j(t)$$

Damit ist die Entwicklung der Emissionreduktion nur von den jeweils eingesetzten Mitteln abhängig.

Für die Beschreibung der Veränderung der Mittel wird ein anderer Ansatz gewählt. Zunächst muss berücksichtigt werden, dass der Mitteleinsatz nicht unbegrenzt sein wird. Für jeden Spieler wird es eine Obergrenze, im Modell mit M^* bezeichnet, geben, die er nicht überschreiten wird. Um das grundsätzliche Wachstum der Mittel zu beschreiben, wurde die logistische Gleichung gewählt (siehe auch Abschnitt 1.3, Seite 13). Diese hat die folgenden Eigenschaften:

- Berücksichtigung einer Grenze beim Wachstum
- Zu Anfang exponentielles Wachstum
- Je näher man der Kapazitätsgrenze ist, desto langsamer ist das Wachstum
  Allgemeines Aussehen:



Die mathematische Formulierung dafür lautet:

$$M_i(t+1) = M_i(t) + \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))$$

Dabei ist der Ausdruck $\lambda_i M_i(t)$ dem exponentiellen Wachstum vergleichbar. Der Parameter λ_i beschreibt das Ausmaß des Wachstums. Der Ausdruck $M_i^* - M_i(t)$ hingegen gibt an, wie weit man von der Kapazitätsgrenze entfernt ist und korrigiert das Wachstum. Je näher die momentanen Mittel der Kapazitätsgrenze sind, desto kleiner wird der Term und die Zunahme wird immer geringer. Daher flacht die Kurve in der Nähe der Obergrenze immer weiter ab.

Wir müssen noch ein weiteres Verhalten in die Gleichungen integrieren. Es ist nicht anzunehmen, dass die Spieler *blind* investieren werden, also nicht darauf achten, was ihre Investitionen bewirken. Der Mitteleinsatz sollte daher die Emissionsreduktionen berücksichtigen:

- Die Akteure *erinnern* sich an die Wirkung ihrer vorherigen Investition:
  Verläuft die Entwicklung der Emissionsreduktionen in die gewünschte Richtung, so muss kein vermehrter Mitteleinsatz stattfinden.
  Gehen die Emissionsreduktion hingegen zurück, und gerät der Spieler damit in Gefahr, seine Vorgaben nicht erfüllen zu können, muss hingegen ein Einsatz von mehr Mitteln erfolgen.

Die Berücksichtigung dieses Verhaltens erfolgt in den Gleichungen durch die Einführung des Erinnerungsparameters ϕ und Kopplung der logistischen Wachstumsgleichung mit dem Emissionen:

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))(E_i(t) + \phi_i \Delta E_i(t))$$

Dabei ist $\Delta E_i(t) = E_i(t+1) - E_i(t)$. Durch $E_i(t)$ werden die Emissionsreduktionen direkt mit den Mittelaufwendungen gekoppelt. Die Größe $\Delta E_i(t)$ beschreibt hingegen die Änderungen der Emissionsreduktionen. Ist der Wert größer Null, nehmen die Reduktionen zu, sonst ab. Der Erinnerungsparameter ϕ steuert dabei das Ausmaß der Beeinflussung durch die Änderung.
Es fällt auf, dass im Gegensatz zur eigentlichen logistischen Gleichung, statt λ der Wert $-\lambda$ steht. Dies bewirkt folgendes:

Es gilt $-\lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t)) < 0$. Damit liegt nur ein Wachstum der Mittel vor, wenn $E_i(t) + \phi_i(\Delta E_i(t)) < 0$ ist
Somit setzt ein Akteur nur mehr Mittel ein, wenn seine Reduktionen abnehmen.

Zusammenfassung: TEM-Modell

- **Emissionsreduktionen:**

$$E_i(t+1) = E_i(t) + \sum_{j=1}^{3} em_{ij} M_j(t)$$

- **Mittelaufwendungen:**

$$M_i(t+1) = M_i(t) - \lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t))(E_i(t) + \phi_i \Delta E_i(t))$$

- **Prinzipielle Steuerung des Modelles:**
  - Durch Variation der Parameter em_{ij}, ϕ_i, λ_i

  Grundbedeutung der Parameter:
  - em_{ij}: Wie wirkt sich der Mitteleinsatz von Spieler j auf die Emissionsreduktion des Spielers i aus?
  - λ_i: Wie stark wachsen die Mittel von Akteur i?
    Da gilt $-\lambda_i M_i(t)(M_i^* - M_i(t)) < 0$
    liegt nur ein Wachstum der Mittel vor,
    wenn $E_i(t) + \phi_i(E_i(t+1) - E_i(t)) < 0$
  - ϕ_i: Steuerung des Ausmaßes der Beeinflussung
    durch $E_i(t+1) - E_i(t)$
    Je höher der Wert, desto stärker berücksichtigt der Spieler die Änderung seiner Reduktionen

1.2 Grundgleichungen

Da wir nur einen einzigen Spieler betrachten, fallen alle entsprechenden Koppelungen weg. Die Gleichungen vereinfachen sich somit zu:

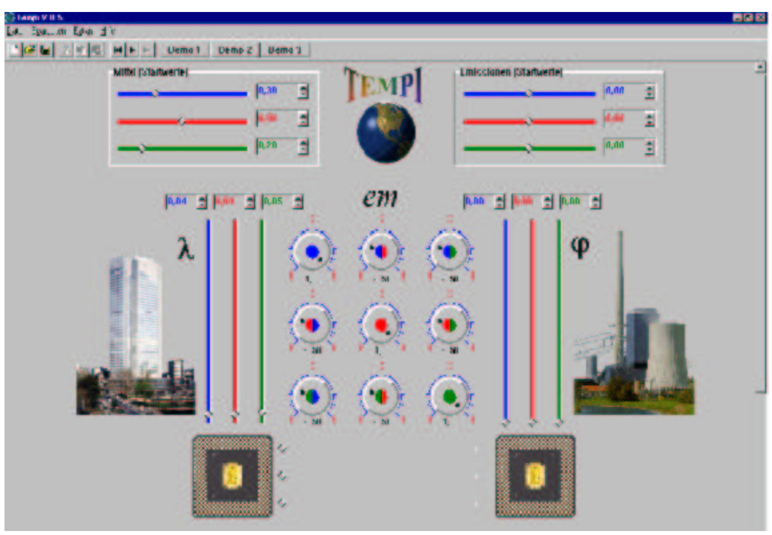
$$
\begin{aligned}
E(t+1) &= E(t) + em\ M(t) \\
M(t+1) &= M(t) - \lambda M(t)(M^{*} - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))
\end{aligned}
$$

Anmerkung:
Es gilt $em > 0$. Die Wahl von $em \leq 0$ ist bei einem einzigen Spieler prinzipiell widersprüchlich zur Gleichung.
Kleine Übung: Warum ?
Tipp: Setzen Sie $em < 0$, $\phi = 0$, $\lambda > 0$ und betrachten Sie $M(t+1)$. Was fällt dabei auf ? Welche Strategie verfolgt der Spieler anscheinend immer ?
Der Wert em sei also größer Null. Betrachten Sie $E(t+1) = E(t) + emM(t)$.

- Was kann man über das Verhältnis von $E(t+1)$ zu $E(t)$ sagen ?
- Was bedeutet das für $M(t+1)$, wenn die Emissionsreduktionen anfangs größer Null sind ?
- Wann wendet der Akteur mehr Mittel auf ? Was muss für die Anfangswerte gelten ?

Nach diesen eher einfacheren Überlegungen gehen wir nun zum Simulationsprogramm selbst über und untersuchen das generelle Verhalten der Gleichungen. Als Erstes entkoppeln wir die Gleichungen mit Hilfe der Drehknopfregler und stellen alle em–Werte außerhalb der Diagonale auf Null. Damit existieren keine Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Akteuren mehr, und wir können in einem Simulationslauf die Auswirkungen unterschiedlicher Parametereinstellungen untersuchen. Wir werden sehen, dass die Gleichungen je nach Wahl der Parameter ihr Verhalten stark variieren können.

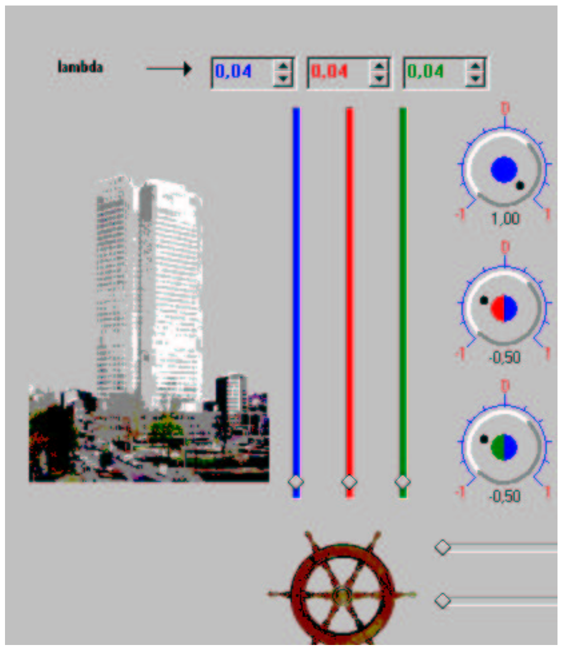
Abbildung 1.1: Simulationsoberfläche



1.2.1 Wachstumsparameter λ

Als Erstes soll der Wachstumsparameter λ betrachtet werden. Wenn die Gleichungen für die einzelnen Spieler entkoppelt sind, wählen Sie die Startwerte für die Mittelaufwendungen im mittleren Bereich (zwischen 0,2 und 0,5) und setzen Sie die Einstellungen für ϕ (Schieberegler rechts) erst einmal auf Null. Als Startwert für die Emissionsreduktionen kann ebenfalls Null eingestellt werden. Der Wachstumsparameter λ kann über die linken Schieberegler reguliert werden.

Abbildung 1.2: Regler für den Wachstumsparameter λ



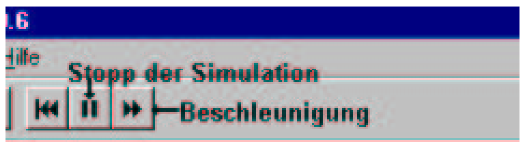
Untersuchen Sie für unterschiedliche Werte von λ das Verhalten der Gleichung (z.B. $\lambda = 0,01;\ 0,1;\ 1$).

- Was fällt dabei auf ? Was bewirkt ein hoher Wert für λ bei den Emissionsreduktionen und warum ?
- Was passiert, wenn die Startwerte für die Emissionen kleiner Null sind, z.B. -1 ?

Eine Simulation selbst kann über einen Klick den Button mit dem nach links zeigenden Dreieck gestartet werden. Daraufhin beginnt das Programm mit der Berechnung und der Anzeige der Werte. Der Button ändert darufhin sein Aussehen und zeigt jetzt das bekannte Pausenzeichen. Ein Klick mit der Maus auf ihn stoppt die Simulation. Läuft sie wieder, so kann man sie mit einem Klick auf den Knopf rechts neben ihn beschleunigen. Mit einem erneuten Drücken wird dann das alte Tempo wieder erreicht. Mit dem Button links neben dem Knopf kann die Simulation gelöscht werden.

Abbildung 1.3: Starten der Simulation

Abbildung 1.4: Anhalten einer Simulation



1.2.2 Erinnerungsparameter ϕ

Neben dem Wachstumsparameter λ weisen die Gleichungen noch den Erinnerungsparameter ϕ auf. Dieser steuert das Ausmaß der Beeinflussung durch die Änderung $E(t+1) - E(t)$.

$$M(t+1) = M(t) - \lambda M(t)(M^* - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))$$

Beschreiben Sie kurz, welche Wirkung ϕ allgemein auf die Gleichung hat:

- Was ist z.B. der Unterschied im Verhalten, wenn man von $\phi = 0$ auf $\phi > 0$ übergeht ?
- Was gilt, wenn $E(t+1) < E(t)$ sein sollte ? (Mit einem Akteur natürlich nicht möglich).
- Welche Wirkung hat ϕ, wenn $E(t)$ wächst ?

Zur genaueren Untersuchung der Auswirkung von ϕ lässt man λ auf einem festen Wert (am besten einem kleinen) stehen und variiert ϕ (z.B. $\phi = 0,01;\ 0,1;\ 1$).

- Was fällt dabei auf ?

Am Deutlichsten wird die Wirkung, wenn die Startwerte für die Emissionsreduktionen negativ sind.
Nachdem wir jetzt die grundsätzlichen Auswirkungen von ϕ und λ kennengelernt

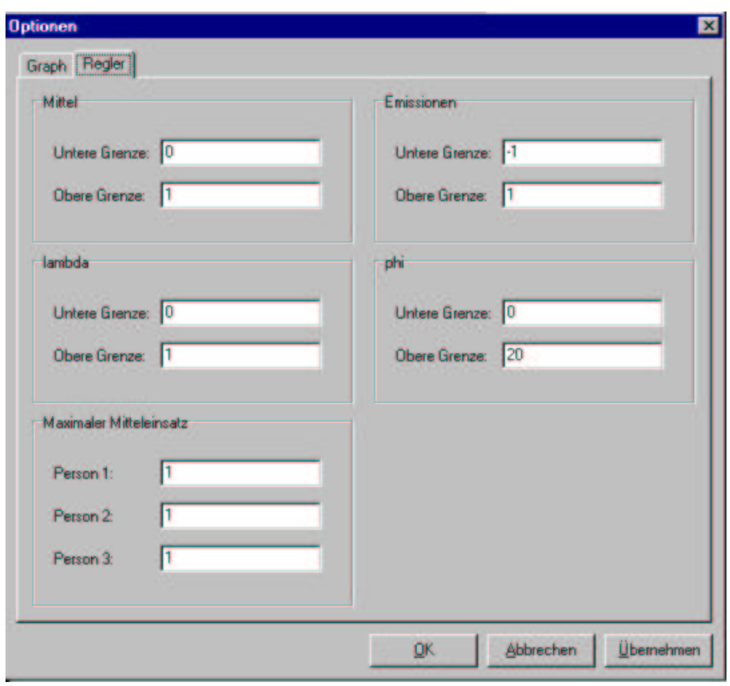
haben, können wir uns mit der Gesamtgleichung auseinandersetzen und Handlungsstrategien für isolierte Akteure entwerfen. Ist es gut schnell zu reagieren, also mit höheren Werten für λ und ϕ zu arbeiten oder ist das gegenteilige Verhalten besser ?
Betrachten Sie die drei isolierte Akteure und die folgende Ausgangssituation:
Die drei Spieler wollen das Kyotoprotokoll umsetzen und somit ihre Emissionen auf den Vorgabewert reduzieren. Alle Akteure liegen um 5 Emissionseinheiten unterhalb dieses Kyotozieles, d.h. sie starten mit -5. Beim Versuch ihre Vorgaben zu erfüllen, wollen sie möglichst geringe finanzielle Mittel aufwenden. Das eingesetzte Startkapital sei für alle gleich und liege recht niedrig, z.B. bei $0,1$.

- Welche Strategie scheint am günstigsten zu sein, wenn man die Zeitspanne außer acht lässt?

Anmerkung: Die Unter– und Obergrenzen der Reduktionsstartwerte lassen sich über den Menupunkt: **Extras>Optionen** einstellen.

Abbildung 1.5: Änderungen der Reglereinstellungen und Startwerte

Es erscheint das folgende Fenster:



Warnung: Die Kombination $\phi = 1$, $\lambda = 1$ führt dazu, dass die Mittelaufwendungen sehr schnell ihre Kapazitätsgrenze erreichen, von der sie sich nicht mehr entfernen können, und sollte daher nicht gewählt werden. Für höhere Werte von ϕ, d.h. $\phi > 7$ tritt der Effekt nicht mehr auf.

1.2.3 Kapazitätsgrenze M^*

Um die Betrachtung der Einzelgleichung abzuschließen, wenden wir uns dem letzten einstellbaren Parameter, der Kapazitätsgrenze M^*, zu. Dieser Wert stellt das Maximum für die Mittelaufwendungen dar. Bei der Grundgleichung für das logistische Wachstum:

$$M(t+1) = M(t) + \lambda M(t)(M^* - M(t))$$

gibt $M^* - M(t)$ an, wie weit man von der Kapazitätsgrenze entfernt ist. Je näher man dieser ist, desto stärker wird das Wachstum abgebremst, so dass die Kurve immer mehr abflacht. Was aber ist die Wirkung bei der erweiterten Gleichung

$$M(t+1) = M(t) - \lambda M(t)(M^* - M(t))(E(t) + \phi(E(t+1) - E(t)))?$$

Die Kapazitätsgrenze lässt ebenfalls sich über den Menupunkt: **Extras>Optionen** einstellen. Die Ausgangseinstellung für die Kapazitätsgrenze ist immer der Wert eins. Führen Sie mehrere Simulationsläufe mit unterschiedlichen Werten für M^* (zwischen 1 und 2) durch.

- Welche auf den ersten Blick eigentlich widersprüchliche Auswirkung läßt sich feststellen ? Woran liegt das ?
- Was passiert bei höheren Werten für M^*, wenn die Startwerte für die Reduktionen positiv und wenn sie negativ sind ?

Achtung: Alle Simulationsläufe, die mit der Kapazitätsgrenze als Startwert für die Mittelaufwendung beginnen, sind wenig sinnvoll.

1.3 Mathematischer Exkurs: Modellbildung und logistisches Wachstum

1.3.1 Die logistische Wachstumsgleichung

Im TEM-Modell wird eine abgewandelte Form der logistischen Wachstumsgleichung verwendet, um die Änderung der Mittel zu beschreiben. Das führt zu der Frage, warum man ausgerechnet diese Gleichung und nicht eine andere gewählt hat.
Wir wollen uns daher im Folgenden mit den Eigenschaften der logistischen Gleichung und ihrer Herleitung befassen. Wenn man die Literatur betrachtet, so scheint sie eine Art Universalmittel zur Abbildung von Wachstumsvorgängen jedweder Art zu sein. Man beschreibt mit ihr das Wachstum von Kapital allgemein, Populationen, Tumoren und in der Soziologie die Ausbreitung von Gerüchten (vergl. [1], S.172).
Auf die Vielfalt dieser Prozesse wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen und uns im Weiteren auf die ursprüngliche Anwendung der Gleichung – natürliche Wachstumsvorgänge und dort im Wesentlichen auf das Wachstum von Tierpopulationen beschränken, um die Benutzung der Gleichung zu motivieren. Wenn man das Wachstum bzw. Veränderung von Populationen betrachtet, dann interessiert man sich nur für die Vorgänge, die die Zahl der Tiere verändern. Das können u.a. sein:

- Geburten
- Sterbefälle: Natürlich, Unfall, Raubtiere
- Abwanderung, Zuwanderung

Alle andereren Vorgänge werden vernachlässigt. Die logistische Gleichung dient zur Beschreibung einer solchen Änderung, aber wie kommt man eigentlich gerade auf sie? Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns mit dem Gebiet der Modellbildung beschäftigen.

1.3.2 Modellbildung

Modellierung und Modellbildung bezeichnen die Abbildung realer Vorgänge auf – letztendlich– mathematische Gleichungen. In unserem Fall meinen wir also die Abbildung des Wachstums auf die logistische Gleichung. Mit einem Modell können die Eigenschaften eines realen Systems untersucht werden, um es besser zu verstehen und kritische Stellen (Tierpopulation: Aussterben bei bestimmten Sterbe– u. Geburtenraten) zu finden. Wie man sehr leicht einsieht, kann man derartige Versuche nicht in der Realität durchführen.
Wir haben oben den Begriff System gebraucht. Hiermit soll im Folgenden die Menge der untersuchten Objekte mitsamt ihren Wechselwirkungen untereinander umschrieben werden. Beispiele für Systeme sind u.a. Ökosysteme oder Räuber–Beute–Systeme, die die Wechselwirkungen zwischen Raubtier– und Beutepopulationen beschreiben.

Beginnt man mit der Modellierung, so wird zuerst der Zweck des Modelles beschrieben, also was man damit erreichen und abbilden möchte. In unserem Fall einer Tierpopulation:
Wir möchten beschreiben, wie sich die Zahl der Tiere mit fortschreitender Zeit ändert.

Dann versucht man die betroffenen Lebewesen oder Gegenstände, wie z.B. Kapital zu identifizieren und die stattfindenden Prozesse zu beschreiben.
Wieder auf die Tierpopulation bezogen heisst das:
Betroffene Lebewesen: Tiere der Population, z.B. Kaninchen im Umkreis von 1 km
Stattfindende Prozesse: Geburten, Sterbefälle, Zu- und Abwanderung

Die Beschreibung findet erst mithilfe eines Wortmodells statt, dann geht man auf Systemdiagramme über, die die Vorgänge grafisch verdeutlichen und endet schließlich bei mathematischen Formeln, mit deren Hilfe die Simulation durchgeführt werden kann (Diese Punkte werden im nächsten Abschnitt genauer erläutert):

Problembeschreibung u. Modellzweck
↓
Identifizierung der beteiligten Größen
↓
Identifizierung der stattfindenden Prozesse
↓
Wortmodell
↓
Systemdiagramm usw.
↓
Modellgleichungen
↓
Quantifizierung der Parameter
↓
Simulation
↓
Untersuchung des Modells
↓
Anwendung

Ein solcher Prozess durchläuft damit vereinfacht ausgedrückt die Punkte:

- **Identifizierung der zu modellierenden Größen** (Zustandsgrößen), also welche Lebewesen spielen eine Rolle ?
- **Identifizierung der stattfindenden Prozesse**, also welche Vorgänge lassen sich finden und wie kann ich sie abbilden ?

- **Korrekte Abbildung der Prozesse im Modell**, soweit das möglich und für den Modellzweck nötig ist. In vielen Modellen wird zum Beispiel die Annahme getroffen, dass die Sterberaten konstant sind, also immer ein gleicher Anteil der Population stirbt. In der Realität ist die Sterberate natürlich keine Konstante, sondern variiert. Die Fehler, die man mit dieser Annahme macht, können aber meistens vernachlässigt werden, weil sie im Endeffekt keine großen Auswirkungen auf das Ergebnis haben. Je genauer ein Modell ist, desto komplizierter und umfangreicher wird es auch, was zu neuen Problemen führt. Zum einem rechnerische – je detaillierter das Modell, desto mehr Gleichungen gibt es, die gelöst werden müssen, was zu einem hohen Aufwand an Rechenzeit führt. Zum anderen werden es immer mehr Gleichungsparameter, die man bestimmen muss. Eine Bestimmung kann ebenfalls schwierig und ungenau sein, und ein Modell ist meist nur so gut wie die Daten, die man benutzt hat. Der Modellzweck bestimmt damit immer das Modell.

- **Aufstellen der mathematischen Gleichungen** bzw. des Simulationsdiagramms, wenn man ein Simulationstool benutzt, welches daraus Differentialgleichungen erstellt.

- Fast immer: Auswahl der numerischen Integrationsart. Viele Gleichungen können nicht geschlossen gelöst, sondern müssen näherungsweise bestimmt werden. Die meisten Simulationsprogramme bieten zwei Möglichkeiten an: Das recht einfache Euler–Cauchy–Verfahren und die kompliziertere Version von Runge–Kutta, die häufig genauere Ergebnisse liefert.

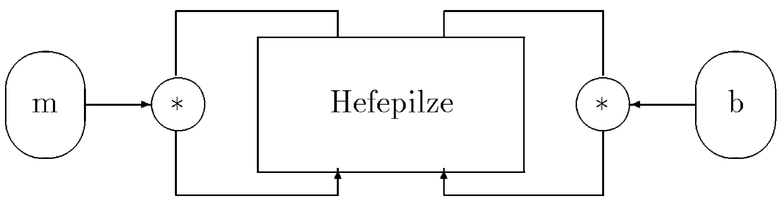
- **Durchführung von Simulationen und Untersuchung des Modells**. Dabei kann das dargestellte System untersucht und das Modell getestet werden. Unter anderen lässt sich durch einen Vergleich von Simulationsrechnung und real vorkommenden Werten die Güte des Modells bestimmen, was eventuell eine Änderung nötig macht. Zudem kann untersucht werden, welcher der Parameter den größten Einfluss auf die simulierte Größe hat, und ob es kritische Werte gibt, die ungünstiges Verhalten auslösen.

1.3.3 Beispiel: Wachstum einer Hefekultur

Wir betrachten als einführendes Beispiel die Entwicklung einer Hefekultur in einer Petrischale. Damit hat man bereits die Zustandsgröße für die Modellierung ermittelt. Weitere existieren in diesem quasi isolierten System nicht. Will man hingegen ein natürlicheres System abbilden, so kann die Identifizierung aller beteiligter Zustandsgrößen ein recht schwieriger Vorgang sein.
Man interessiert sich meist für das Wachstum der Hefekultur, womit als Modellzweck die Beschreibung des Wachstums der Pilzpopulation über die Zeit gewählt werden kann. Die stattfindenden Prozesse stellen bei Hefepilzen in Petrischalen auch keine Schwierigkeiten dar. Hefepilze vermehren sich durch Teilung und sterben offensichtlich ab. Dies führt zu den Veränderungen: Hefepilze sterben und Hefepilze vermehren sich.

Jetzt trifft man die ersten Annahmen, um diese Prozesse abzubilden: Die Vermehrung durch Teilung ist offensichtlich abhängig von der Zahl der Mikroorganismen, die vorhanden sind. Ebenso kann man annehmen, dass die Sterbevorgänge proportional zur Population sind. Weiterhin sollen beide Vorgänge in dem Sinn konstant sein, dass immer ein bestimmter Anteil der vorhandenen Masse stirbt bzw. neu entsteht.

Hefepopulation:
  Mikroorganismen zum Zeitpunkt t: $B(t)$
Vorgänge:
  Sterben zum Zeitpunkt t: $mB(t)$
  Vermehrung zum Zeitpunkt t: $bB(t)$



Veränderung der Zustandgröße beim Übergang von t zu $t + \Delta t$:

$$B(t + \Delta t) - B(t) = mB(t)\Delta t - bB(t)\Delta t$$

Damit haben wir die Gleichungen aufgestellt. Wenn man das Wachstum diskret mithilfe von Differenzengleichungen abbilden möchte, oder ein Simulationstool, wie z.B. Dynasys, benutzt, ist man hiermit fertig. Man muss noch geeignete Werte für den Startwert der Hefepopulation vorgeben und die Parameter m und b setzen.
Wir wollen allerdings zum kontinuierlichen Fall übergehen und uns mit der Differentialgleichung beschäftigen. Dazu formen wir die Gleichung um:

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = mB(t) + bB(t) = (m - b)B(t)$$

Auf der linken Seite steht damit der Differenzenquotient: $\frac{B(t+\Delta t)-B(t)}{\Delta t}$. Wir wollen jetzt –wie gesagt– keine diskreten, sondern kontinuierliche Änderungen betrachten, d.h. solche, bei denen man keine festen Zeitschritte mehr feststellen kann. Daher betrachten wir, was mit der obigen Gleichung geschieht, wenn die Zeitintervalle immer geringer werden. Wenn die Zeitschritte Δt gegen Null gehen, geht der Differenzenquotient gegen die Ableitung von $B(t)$, geschrieben als $\frac{d}{dt}B(t)$. Wir erhalten damit die Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}B(t) = (m-b)B(t).$$

Wir kennen damit nur die Funktion für Veränderung der Hefepopulation. Um die Funktion für die Hefekultur selbst zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichung lösen, was durch Integration beider Seiten der Gleichung geschieht. Hierfür muss man die Gleichung zuerst ein wenig umformen. Es ist störend, dass auf beiden Seiten ein Ausdruck mit $B(t)$ vorkommt. Daher bringt man zunächst alle Terme mit $B(t)$ auf eine Seite der Gleichung:

$$\frac{\frac{d}{dt}B(t)}{B(t)} = (m-b)$$

Jetzt müssen zwei Punkte berücksichtigt werden:

- **Kettenregel** $\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)$
- **Ableitung des natürlichen Logarithmus** $ln(x)$: $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Damit ist $\frac{\frac{d}{dt}B(t)}{B(t)}$ nichts anderes als: $\frac{d}{dt}ln(B(t))$. (Wer es nicht so glauben möchte, kann $ln(B(t))$ zur Probe nach t ableiten.) Die Gleichung kann damit geschrieben werden als $\frac{d}{dt}ln(B(t)) = (m-b)$ und ausintegriert werden.

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{d}{dt}ln(B(t))dt &= \int_0^s (m-b)dt \\
[ln(B(t))]_0^s &= [(m-b)t]_0^s \\
ln(B(s)) - ln(B(0)) &= ln(\frac{B(s)}{B(0)}) = (m-b)s
\end{aligned}$$

Jetzt wendet man auf beide Seiten die Umkehrfunktion des Logarithmus, die e-Funktion an.

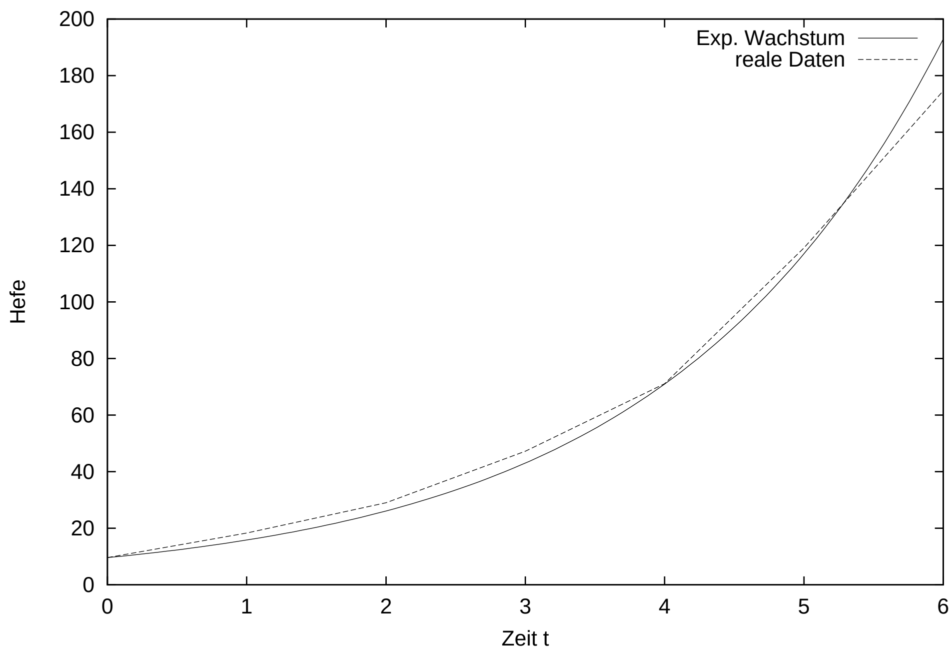
$$\frac{B(s)}{B(0)} = e^{(m-b)s} = e^{rs}$$

Und schließlich: $B(t) = B(0)e^{rs}$. Damit hat man die Gleichung ermittelt. Den freien Parameter bestimmt man durch das Anpassen der Gleichung an die gemessenen Werte (siehe die folgende Tabelle). Mit Anpassen ist nichts anderes gemeint, als dass man versucht r so zu wählen, dass die vorgegebenen Datenpunkte möglichst gut getroffen werden.

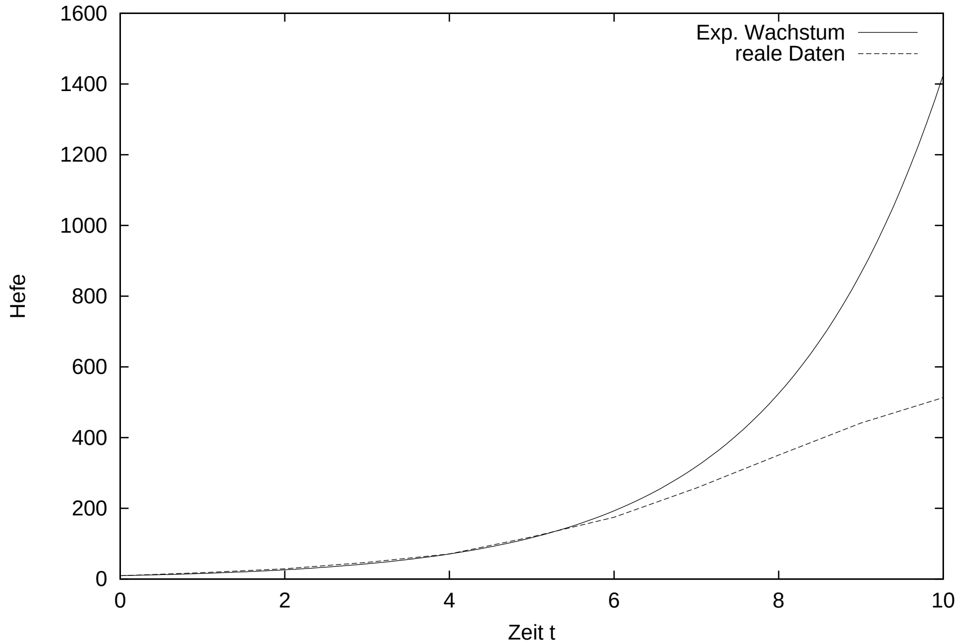
Wachstum einer Hefekultur(Carlson 1913)

Zeit t (in Std.)	*Hefemenge N(t) (in mg)*
0	9,6
1	18,3
2	29,0
3	47,2
4	71,1
5	119,1
6	174,6
7	257,3
8	350,7
9	441,0
10	513,3
11	559,7
12	594,8
13	629,4
14	640,8
15	651,1
16	655,9
17	659,6
18	661,8

Quelle: Krebs 1972, S.218 (bzw. [14])
Wie man sieht, trifft die gewählte Gleichung anfänglich die Werte recht gut.



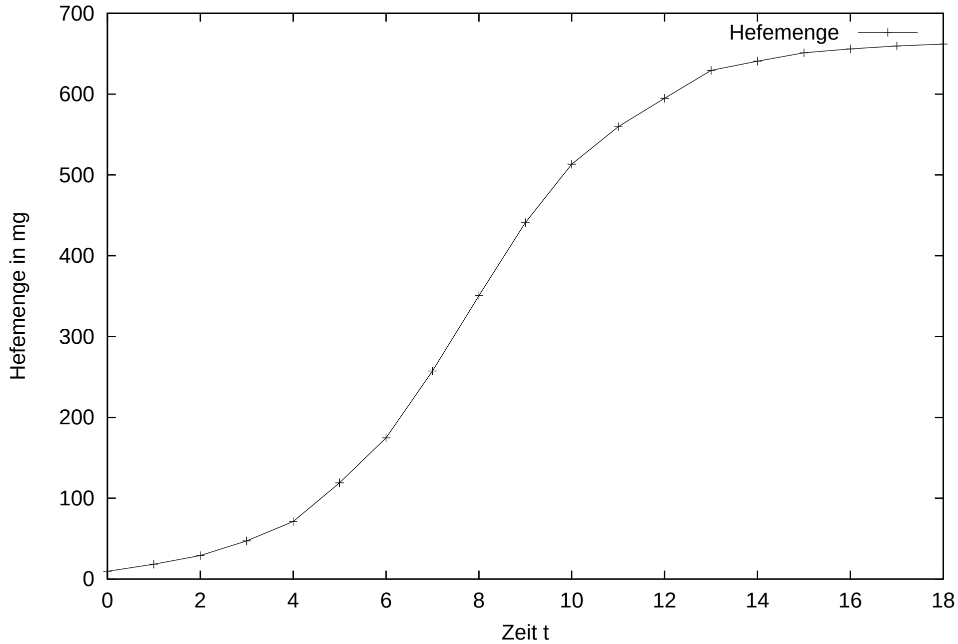
Später allerdings überhaupt nicht mehr, was daran liegt, dass ein exponentielles Wachstum immer stärker ansteigt und schließlich gegen Unendlich geht.



Aufgabe: Tragen Sie die Daten aus der Tabelle auf oder betrachten Sie die folgende Abbildung.

- Wie sieht das gesamte Wachstum hier aus ?
- Welche Gründe können Sie Sich für den Stopp des Wachstums vorstellen ?

Die exponentielle Wachstumsgleichung eignet sich also nicht zur Modellierung dieses Wachstumsvorganges. Wir gehen zur logistischen Beschreibung über. Verhulst stellte bereits 1838 die Grundgleichung auf und formulierte damit eine fundamentale Tatsache. Jedes Wachstum in der Natur ist begrenzt. Zwar kann man mit der exponentiellen Wachstumsgleichung viele Vorgänge in der Natur anfangs ausgezeichnet beschreiben, doch stößt man auf Probleme, wenn die Population sich weiter entwickelt. In der Sprache der Modellierung hat man beim Aufstellen des Modells einen *Abbildungsfehler* gemacht. Anscheinend sind wichtige Vorgänge nicht berücksichtigt worden. Wir sehen, dass das natürliche Wachstum anscheinend irgendwann stoppt, und die Population einen bestimmten Wert nicht überschreitet.



Natürliche Ursachen für ein solches Verhalten können sein:

- Begrenzung der natürlichen Ressourcen: Nahrung etc
- Stressreaktionen bei Zunahme der Bevölkerung
- Konkurrenz innerhalb der Population usw

Eine mathematische Formulierung hierfür stellt die logistische Wachstumsgleichung dar. Sie existiert in mehreren Formen, die allerdings alle ineinander überführbar sind. Sehr häufig wird die folgende Darstellung verwendet:

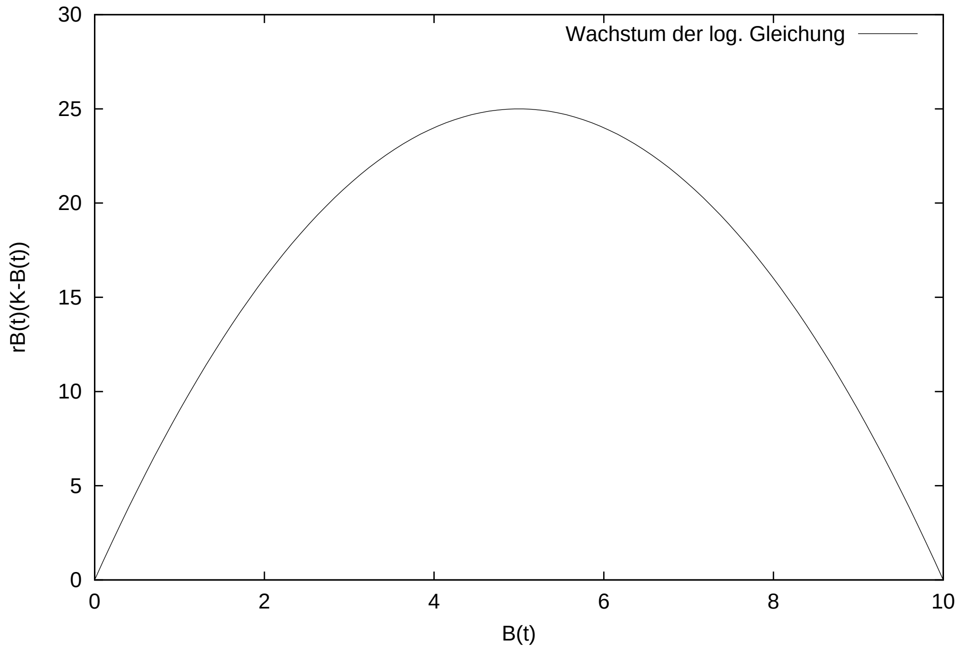
$$\frac{d}{dt}B(t) = rB(t)(K - B(t)),$$

wobei K die Kapazitätsgrenze, also die maximal zu erreichende Population angibt. Der Parameter r ist nachwievor die Wachstumsrate, die allerdings jetzt mit $K - B(t)$ korrigiert wird. Ähnlich häufig findet sich:

$$\frac{d}{dt}B(t) = aB(t) - bB^2(t))$$

was der Ausmultiplikation der ersten entspricht. Der Wert $bB^2(t)$ wird dabei als Korrekturfaktor für das exponentielle Wachstum aufgefasst, der durch die innerartliche Konkurenz entsteht und daher proportional zur Häufigkeit des Aufeinandertreffens zweier Individuen ist.
Aber zurück zur ersten Gleichung. Der Ausdruck $rB(t)(K - B(t))$ wird zunächst immer größer, wenn $B(t)$ ansteigt, das Wachstum somit immer stärker. Dieses Verhalten tritt solange auf, bis $K - B(t)$ deutlicher an Gewicht gewinnt, was –wie man leicht sieht– bei $B(t) = \frac{K}{2}$ der Fall ist. Von da an flacht das Wachstum immer weiter

ab, bis schließlich bei $B(t) = K$ die Null erreicht und dann überschritten wird. In der folgenden Grafik wurde $rB(t)(K - B(t))$ gegen $B(t)$ für $r = 1$ und $K = 10$ aufgetragen. Die entstandene Parabel besitzt einen Scheitelpunkt bei $B(t) = 5$.



Mithilfe der logistischen Gleichung konnten die Wachstumsvorgänge bei verschiedenen Populationen erfolgreich beschrieben werden:

Einsatz der logistischen Wachstumsgleichung zur Beschreibung des Wachstums von:

E. coli	McKendrick, Kasava Pai	1911
Hefezellen	Carlson	1913
Bevölkerung der USA	Pearl, Reed, Verhulst	1924
Drosophila Melanogaster (Taufliege)	Pearl	1932
Pantoffeltierchen	Gause	1934
Daphnien (Wasserflöhe)	Slobodkin	1954
Drosophila semata	Ayala	1968

(siehe [1], S. 163)

Der Vorteil der logistischen Wachstumsgleichung ist, dass die Zahl der Parameter (K und r) noch immer gering ist. Damit treten keine größeren Probleme auf. Auch die logistische Gleichung kann nach etwas längerer Rechnung gelöst werden und führt letztendlich auf die Formel:

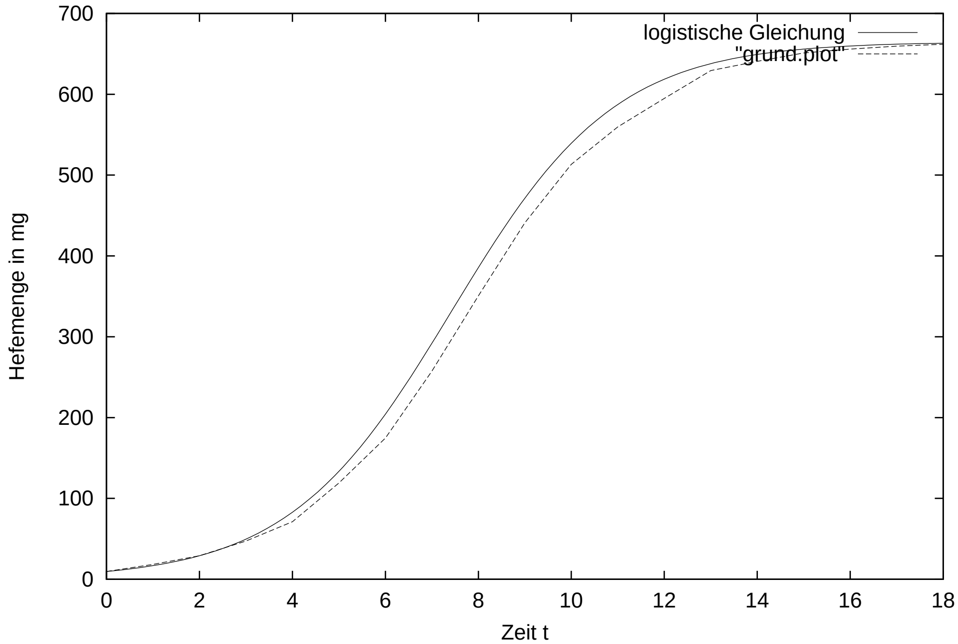
$$B(s) = \frac{K}{(\frac{(K-B(0))}{B(0)})e^{-rKs} + 1}$$

Aufgabe:

- Zeigen Sie durch Ableiten, dass $B(s)$ die Differentialgleichung erfüllt.

(Tipp: An einer Stelle ist eine Ergänzung mit 1, ähnlich wie bei der quadratischen Ergänzung sehr hilfreich.)

Die beiden Parameter r und K werden wieder durch Anpassung der logistischen Gleichung an die realen Daten bestimmt. Nach Kohorst, Portscheller (siehe [14]) ergeben sich hier Werte von 0,00845 für r und 664,858 für K. Die Gleichung sieht im Vergleich zu den gemessenen Daten folgendermaßen aus:



Wir scheinen also eine korrekte Beschreibung benutzt zu haben.

Aufgabe:

Ausbreitung von Infektionskrankheiten (Ohne Geburten)

Wir wollen den Verlauf von Infektionskrankheiten simulieren, die vom Menschen auf den Menschen übertragen werden und keine anderen Wirte besitzen. Zu Anfang betrachten wir die Ausbreitung, wenn weder Geburten– noch Sterbefälle vorliegen. Damit kann man grob und kurzfristig den Verlauf von gutartigen Krankheiten simulieren. Ein gesunder Mensch erkrankt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, wenn er auf einen bereits erkrankten trifft. Erkrankt ein Mensch, so wird er nach kurzer Zeit ebenfalls infektiös. Hier im Modell soll die Annahme getroffen werden, dass dies sofort nach der Ansteckung geschieht. Nach einiger Zeit wird der Mensch wieder gesund und ist im folgendem immun gegen die Krankheit. Die Gruppe der Immunen kann –je nach Modellinterpretation– auch die an der Epidemie gestorbenen aufnehmen.

- Identifizieren Sie die Zustandsgrößen: Wie viele braucht man mindestens ?
- Beschreiben Sie die stattfindenden Prozesse: Welche Veränderungen gibt es und was passiert ?
- Stellen Sie einen Wirkungsgraphen oder ein Simulationsdiagramm auf. Welche Zustandsgrößen sind miteinander verknüpft bzw. welche Zustandsgrößen

können in eine andere übergehen? Mit Wirkungsgraph ist hier ein einfaches Diagramm gemeint: Darstellung von Zustandsgrößen mit Rechtecken, von Übergängen und Koppelungen mit Pfeilen.

- Stellen Sie die Gleichungen auf. Alle Parameter, d.h. Raten für die Vorgänge gesund zu werden bzw. zu sterben seien konstant. Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Infizierte $I(t)$ und noch nicht Erkrankte $G(t)$ aufeinander treffen ist proportional zum Produkt $I(t) * G(t)$.

- Simulieren Sie die Gleichungen mithilfe eines geeigneten Tools: Die Summe der Anfangswerte für die Infizierten, Immunen und Gesunden sollte dabei eins ergeben. Wir arbeiten damit mit relativen Anteilen an der Gesamtbevölkerung. Vorschlag:
  Anteil der Gesunden: 0,999, Anteil der Infizierten 0,001, Anteil der Immunen 0. Wir betrachten den Ausbruch einer neuen Epidemie, bei der sich anfänglich 0,1 % der Bevölkerung angesteckt haben und sich noch keine Imminutäten ausbilden konnten.

  - Lassen Sie den Übergangsparameter zwischen Kranken und Immunen auf einem festen Wert (z.B. 1) stehen und variieren Sie den Ansteckungsparameter (2 – 10). Was lässt sich dabei für den Verlauf der Epidemien feststellen ?
  - Nehmen Sie einen relativ geringen Wert für den Ansteckungsparameter an (z.B. 2). Der Anteil der Kranken an der Bevölkerung betrage 0,1%. Wie hoch muss die Zahl der Gesunden, aber nicht Immunen anfänglich sein, damit die Epidemie ausbricht ?

Aufgabe:
Ausbreitung von Infektionskrankheiten (Mit Geburten- und Sterbefällen)
Wir betrachten wieder eine menschliche Bevölkerung diesmal mit einer festen Geburtenrate (μ), bei der eine Infektionskrankheit ausbricht. Ein gesunder Mensch erkrankt wieder mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, wenn er auf einen bereits erkrankten trifft. Danach ist er wiederum sofort ansteckend. Je nach Krankheitsverlauf stirbt der Mensch oder er wird wieder gesund und ist im folgenden immun. Alle Kinder, die geboren werden, sind gesund und können sich anstecken. Sowohl Gesunde als auch Kranke und Immune können sterben.

- Identifizieren Sie die Zustandsgrößen: Wie viele braucht man mindestens ?

- Beschreiben Sie die stattfindenden Prozesse: Welche Veränderungen gibt es und was passiert ?

- Stellen Sie einen Wirkungsgraphen oder ein Simulationsdiagramm auf.

- Stellen Sie die Gleichungen auf. Alle Parameter, d.h. alle Raten, seien konstant. Anmerkung: Die Wahrscheinlichkeit, dass Infizierte $I(t)$ und noch nicht Erkrankte $G(t)$ aufeinander treffen ist proportional zum Produkt $I(t) * G(t)$.

Die Geburtenrate sei fest und nicht abhängig von der Bevölkerungszahl (damit ist sie eine Konstante).

- Simulieren Sie die Gleichungen mithilfe eines geeigneten Tools:
- Setzen Sie die anfänglichen Werte für die Gesunden auf $0,999$ und die Infizierten auf $0,001$. Es haben sich also anfänglich $0,1\%$ der Bevölkerung infiziert.
  - Was passiert bei sehr ansteckenden, aber gutartig verlaufenden Krankheiten ? Die Sterblichkeit ist also gegenüber der normalen nur wenig oder -der Einfachheit halber gar nicht- erhöht ? Setzen Sie die Sterberate gleich der Geburtenrate und den Wert für die Heilungsrate auf 1. Variieren Sie die Ansteckungsrate im Bereich von 2 bis 10 und die Geburten– und Sterberate im Bereich von 0,001 bis 0,1. Was muss gelten, damit die Krankheit ausstirbt und was, damit sie vorhanden bleibt ? Treten hier Schwingungen auf ? Man sollte dabei das dargestellte Zeitintervall recht groß wählen, um 250.
  - Was passiert bei Krankheiten mit hoher Sterblichkeit (z.B. Zehnfache der Geburtenrate), aber geringer Ansteckungswahrscheinlichkeit ?

(Modelle und Beispiele aus [10])

Zusammenfassung Kapitel 1

Im Kapitel 1 wurden die Grundgleichungen des TEM–Modells vorgestellt und ein erster Einblick in die Simulationsoberfläche gegeben. Hierbei wird neben den Schwierigkeiten im Umgang mit Modellen als Abbild der Wirklichkeit die Wirkungsweise der einzelnen Parameter und ihre funktionalen Zusammenhänge erläutert. Es zeichnet das TEM–Modell aus, dass nur empirisch bestimmbare Parameter herangezogen werden.